

DINAMIK HUDUDLARDA OB'YEKT TRAYEKTORIYASINI ANIQLASH VA PROGNOZLASHNING MATEMATIK ASOSLARI

Narziyev Nosir Baxshilloevich
Saidqodirov Xumoyunxon Yashnarjon o'g'li
Ahmedova Kamola Mahmud qizi

Toshkent axborot texnologiyalari universiteti, Toshkent, O'zbekiston ATDT kafedrası katta o'qituvchisi, DIF 310-23 guruh talabasi, DIF 319-24 guruh talabasi n.b.narziyev@gmail.com, xumoyun.saidqodirov@gmail.com, axmedovakamola31@gmail.com

Annotatsiya: Ushbu maqolada dinamik hududlarda harakatlanuvchi ob'yektlar trayektoriyasini aniqlash va kelajakdagi holatini prognozlashning matematik asoslari o'rganiladi. Tadqiqotning dolzarbligi shundaki, aqlli transport tizimlari, robototexnika va xavfsizlik monitoringida ob'yektning kelgusi holatini oldindan bilish — to'qnashuvlarni oldini olish, trafik boshqaruvi va avtomatik rejalashtirish uchun muhimdir. Ammo dinamik muhitlarda — o'zgaruvchan tezlik, noto'g'ri o'lchovlar va ko'p ob'yektning o'zaro ta'siri — prognoz aniqligini saqlash qiyin masala bo'lib qolmoqda. Muammoni hal etish uchun Bayesian trayektoria modeli, Gaussian jarayonlar (GP) regressiyasi va Long Short-Term Memory (LSTM) neyron tarmog'ini birlashtiradigan gibril prognoz tizimi taklif etiladi. ETH/UCY pedestrian va nuScenes transport ma'lumotlar to'plamlarida o'tkazilgan tajribalar 1 soniya ufqda ADE = 0.28 m va FDE = 0.41 m xato darajasiga erishganligini ko'rsatdi. Ilmiy yangilik — deterministik Bayesian model, ehtimollik GP regressiyasi va chuqur o'rganish LSTM ni birlashtirgan uch qatlamli gibril prognoz arxitekturasini yaratishdan iborat.

Kalit so'zlar: trayektoria prognozi, Bayesian model, Gaussian jarayon, LSTM, dinamik muhit, ADE/FDE mezonlari, aqlli transport, ob'yektlarni kuzatish, stoxastik dinamika, deterministik model.

Аннотация: В данной статье исследуются математические основы обнаружения траекторий движущихся объектов и прогнозирования их будущего положения в динамических областях. Актуальность исследования определяется тем, что в интеллектуальных транспортных системах, робототехнике и мониторинге безопасности предварительное знание будущего состояния объекта необходимо для предотвращения столкновений, управления трафиком и автоматического планирования. Для решения задачи предлагается гибридная система прогнозирования, объединяющая байесовскую модель траектории, регрессию гауссовских процессов (GP) и рекуррентную нейронную сеть LSTM. Эксперименты на наборах данных ETH/UCY и nuScenes показали ошибку ADE = 0.28 м и FDE = 0.41 м на горизонте 1 секунды. Научная новизна состоит в создании



трёхуровневой гибридной архитектуры, объединяющей детерминированную байесовскую модель, вероятностную регрессию GP и глубокое обучение LSTM.

Ключевые слова: прогнозирование траектории, байесовская модель, гауссовский процесс, LSTM, динамическая среда, метрики ADE/FDE, интеллектуальный транспорт, отслеживание объектов, стохастическая динамика, детерминированная модель.

Abstract: *This paper investigates the mathematical foundations of detecting trajectories of moving objects and predicting their future states in dynamic areas. The relevance of the study is determined by the necessity of predicting future object states in intelligent transportation systems, robotics, and security monitoring to prevent collisions, manage traffic, and enable automatic planning. A hybrid prediction system combining a Bayesian trajectory model, Gaussian Process (GP) regression, and Long Short-Term Memory (LSTM) neural network is proposed. Experiments on ETH/UCY pedestrian and nuScenes driving datasets demonstrated ADE = 0.28 m and FDE = 0.41 m at a 1-second prediction horizon. The scientific novelty lies in creating a three-layer hybrid prediction architecture combining a deterministic Bayesian model, probabilistic GP regression, and deep learning LSTM.*

Keywords: *trajectory prediction, Bayesian model, Gaussian process, LSTM, dynamic environment, ADE/FDE metrics, intelligent transportation, object tracking, stochastic dynamics, deterministic model.*

KIRISH

Harakatlanuvchi ob'yektlar trayektoriyasini aniqlash va kelajakdagi holatini prognozlash — zamonaviy kompyuter ko'rishi, robototexnika va aqlli transport tizimlarining eng muhim vazifalaridan biri hisoblanadi. Avtonom transport vositalarida to'qnashuvsiz harakat rejalashtirish, piyodalar xavfsizligini ta'minlash va trafik oqimini boshqarish uchun ob'yektning kelgusi trayektoriyasini aniq bashorat qila olish talab etiladi [1, 2].

Dinamik hududlarda trayektoriya prognozi bir qator murakkab muammolarni o'z ichiga oladi. Birinchidan, ob'yektning harakati ko'pincha nochiziqli va stoxastik tabiatga ega — insonlar, mashinalar va robotlar kutilmagan yo'nalish o'zgarishlarini amalga oshirishi mumkin. Ikkinchidan, sensor o'lchovlari shovqin va to'siqlar tufayli noaniq bo'lishi mumkin. Uchinchidan, bir necha ob'yekt bir vaqtda harakatlanayotganda ular o'rtasidagi o'zaro ta'sirni hisobga olish zarur. To'rtinchidan, prognoz gorizonti uzaygan sari noaniqlik geometrik tarzda ortadi [3, 4].

Mavjud trayektoriya prognoz usullari uch guruhga bo'linadi: (1) fizika asosidagi deterministik modellar (Kalman filtri, Singer modeli) — tezkor, lekin murakkab harakatga moslasha olmaydi; (2) ehtimollik modellari (Gaussian jarayonlar, GMM) — noaniqlikni ifodalaydi, lekin hisoblash yukli; (3) chuqur o'rganish modellari (LSTM, Transformer,



GNN) — yuqori aniqlik, lekin ko'p o'quv ma'lumoti talab qiladi va interpretatsiyasi qiyin [5]. Ushbu uch yondashuvning kuchli tomonlarini birlashtirgan gibrid model zarurligi tadqiqot motivini belgilaydi.

Tadqiqotning maqsadi — dinamik hududlarda ob'yekt trayektoriyasini aniqlash va prognozlashning matematik asoslarini ishlab chiqish hamda uch qatlamli gibrid model taklif etish. Ilmiy yangilik sifatida Bayesian trayektoria modeli, GP regressiyasi va LSTM ni ierarxik tarzda birlashtirib, deterministik va ehtimollik elementlarini muvozanatlashtiruvchi yondashuv taqdim etiladi.

ADABIYOTLAR SHARHI

Trayektoria prognozining matematik asoslarida Kalman [6] ning rekursiv filtrlash algoritmi deterministik yondashuv uchun poydevor bo'lib xizmat qiladi. Singer [7] ning moslashuvchi tezlanish modeli ob'yektning tasodifiy manyovr qilishini hisobga olishga imkon beradi. Ushbu modellar chiziqli harakat uchun optimal bo'lsa-da, keskin burilish va qarama-qarshi harakatni prognozlashda cheklovlarga ega.

Ehtimollik yondashuvlari orasida Gaussian jarayon regressiyasi [8] noaniqlikni bayesian ramkada ifodalab, prognoz intervallari bilan birga markaziy bahoni beradi. Rasmussen va Williams [9] ning asosiy ishi GP ni mashinani o'qitishda qo'llashning nazariy asosini yaratdi. Alahi va boshqalar [10] ning Social Force modeli piyodalar orasidagi ijtimoiy o'zaro ta'sirni matematik jihatdan modellashtirdi.

Chuqur o'rganish sohasida Alahi va boshqalar [11] ning Social LSTM ishi piyodalar trayektoriyasi prognozida LSTM dan foydalanishning samaradorligini ko'rsatdi. Gupta va boshqalar [12] ning Social GAN modeli generativ raqibdosh tarmoq (GAN) yordamida bir necha mumkin bo'lgan trayektoriyalarni bir vaqtda bashorat qiladi. Zamonaviy Transformer asosidagi yondashuvlar [13] diqqat mexanizmi orqali ob'ektlar orasidagi uzoq muddatli bog'liqlikni samarali modellashtirishni ta'minlaydi. Gibrid yondashuvlar bo'yicha [14] fizika modeli va neyron tarmoqni birlashtirish yo'llari ko'rib chiqilgan, ammo Bayesian noaniqlik tahlili bilan LSTM integratsiyasi yetarli darajada o'rganilmagan.

METODOLOGIYA

3.1. Trayektoria matematikasi va holat fazosi

Ob'yektning t vaqtdagi holati holat vektori sifatida ifodalanadi:

$$s_t = [x_t, y_t, \dot{x}_t, \dot{y}_t, \ddot{x}_t, \ddot{y}_t]^T \in \mathbb{R}^6 \quad (1)$$

bu yerda (x_t, y_t) — pozitsiya, (\dot{x}_t, \dot{y}_t) — tezlik, (\ddot{x}_t, \ddot{y}_t) — tezlanish komponentlari.

Trayektoria T vaqt oralig'idagi holatlar ketma-ketligi:

$$\tau = \{s_1, s_2, \dots, s_t, s_{t+1}, \dots, s_{t+n}\} \quad (2)$$

Prognoz masalasi: $\{s_1, \dots, s_t\}$ kuzatilgan trayektoria asosida $\{s_{t+1}, \dots, s_{t+n}\}$ kelajak holatlarini aniqlash. Umumiy stoxastik dinamik model:

$$s_{t+1} = f(s_t, u_t) + w_t, \quad w_t \sim N(0, Q) \quad (3)$$



bu yerda $f(\cdot)$ — o'tish funksiyasi, u_t — boshqaruv kirishi, w_t — jarayon shovqini, Q — kovariansiya matrisi.

3.2. Bayesian trayektoriya modeli

Bayesian ramkasida kelajak holat taqsimoti posterior ehtimollik sifatida ifodalanadi:

$$p(s_{t+1:t+n} | s_{1:t}) \propto p(s_{1:t} | s_{t+1:t+n}) \cdot p(s_{t+1:t+n}) \quad (4)$$

bu yerda $p(s_{t+1:t+n})$ — prior taqsimot, $p(s_{1:t} | s_{t+1:t+n})$ — ishonchlilik funksiyasi.

Extended Kalman Filter (EKF) yordamida noxiziqli o'tish uchun linearizatsiya:

$$F_t = \partial f / \partial s |_{s=\hat{s}_t} \quad (5)$$

bu yerda F_t — Jacobian matrisi. Posterior kovariansiya yangilanishi:

$$P_{t+1|t} = F_t \cdot P_{t|t} \cdot F_t^T + Q \quad (6)$$

Singer manyovr modelida tezlanish jarayoni birinchi tartibli Markov jarayoni sifatida modellashtiriladi:

$$\ddot{x}_{t+1} = e^{(-\alpha \Delta t)} \cdot \ddot{x}_t + w_t, \quad w_t \sim N(0, \sigma_m^2(1 - e^{(-2\alpha \Delta t)})) \quad (7)$$

bu yerda α — manyovr tezligi konstantasi ($\alpha \in [0.1, 2.0] \text{ s}^{-1}$), σ_m — manyovr intensivligi, Δt — diskretlash davri.

3.3. Gaussian jarayon regressiyasi

GP regressiyasi yordamida trayektoriya funksiyasi $f(t) \sim GP(\mu(t), k(t, t'))$ deb modellanadi. Kovariansiya yadrosi (kernel):

$$k(t, t') = \sigma_f^2 \cdot \exp(-||t - t'||^2 / 2l^2) + \sigma_n^2 \cdot \delta(t, t') \quad (8)$$

bu yerda σ_f^2 — signal dispersiyasi, l — uzunlik masshtabi, σ_n^2 — shovqin dispersiyasi, δ — Kronecker delta. N ta kuzatuv nuqtasi uchun prognoz taqsimoti:

$$f^* | X, y, X^* \sim N(\mu^*, \Sigma^*) \quad (9)$$

$$\mu^* = K(X^*, X) \cdot [K(X, X) + \sigma_n^2 I]^{-1} \cdot y \quad (10)$$

$$\Sigma^* = K(X^*, X^*) - K(X^*, X) \cdot [K(X, X) + \sigma_n^2 I]^{-1} \cdot K(X, X^*) \quad (11)$$

bu yerda $K(\cdot; \cdot)$ — kernel matrisi, X — o'quv nuqtalari, X^* — prognoz nuqtalari, y — kuzatilgan qiymatlar. GP giperparametrlari marginal log-ehtimollikni maksimallashtirish orqali topiladi:

$$\log p(y|X) = -\frac{1}{2} y^T K_y^{-1} y - \frac{1}{2} \log |K_y| - n/2 \cdot \log(2\pi) \quad (12)$$

3.4. LSTM asosidagi temporal modellashtirish

LSTM hujayrasining yangilanish tenglamalari:

$$i_t = \sigma(W_i \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_i) \quad (13)$$

$$f_t = \sigma(W_f \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_f) \quad (14)$$

$$o_t = \sigma(W_o \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_o) \quad (15)$$

$$c_t = f_t \odot c_{t-1} + i_t \odot \tanh(W_c \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_c) \quad (16)$$

$$h_t = o_t \odot \tanh(c_t) \quad (17)$$





bu yerda i_t, f_t, o_t — mos ravishda kirish, unutish va chiqish darvozalari; c_t — hujayra holati; h_t — yashirin holat; \odot — element-wise ko'paytirish. Prognoz yo'qotish funksiyasi:

$$L_LSTM = (1/N) \cdot \sum_i \|\hat{s}_i - s_i\|_2^2 + \lambda \cdot \|\theta\|_2^2 \quad (18)$$

bu yerda \hat{s}_i — prognoz qilingan holat, s_i — haqiqiy holat, $\lambda = 0.001$ — L2 regularizatsiya koeffitsienti.

3.5. Uch qatlamli gibrid integratsiya

Uch qatlam natijalarini birlashtirish uchun Dempster-Shafer nazariyasiga asoslangan og'irlikli birlashma qo'llaniladi:

$$\hat{s}_{gibrid} = w_B \cdot \hat{s}_{Bayes} + w_GP \cdot \hat{s}_{GP} + w_L \cdot \hat{s}_{LSTM} \quad (19)$$

Og'irliklar prognoz gorizonti va noaniqlik darajasiga qarab dinamik hisoblanadi:

$$w_i = \exp(-\sigma_i^2) / \sum_j \exp(-\sigma_j^2) \quad (20)$$

bu yerda σ_i^2 — i-modelning prognoz dispersiyasi. Qisqa gorizontda ($\Delta t < 1s$) Bayesian va EKF modeli ustunlik qiladi (tezkor va aniq), o'rta gorizontda (1–3s) GP regressiyasi, uzun gorizontda ($>3s$) esa LSTM og'irligi ortadi. Noaniqlik konvertligi (prediction cone):

$$C(t) = \{s : \|s - \mu(t)\| \leq z_a \cdot \sigma(t)\} \quad (21)$$

bu yerda $\mu(t)$ — o'rtacha prognoz trayektoriyasi, $\sigma(t)$ — standart og'ish, z_a — α ishonch darajasiga mos z-ball ($\alpha=0.95$ uchun $z_a = 1.96$).

MUHOKAMA VA NATIJALAR

4.1. Ma'lumotlar to'plami va baholash mezonlari

Tajribalar uchta standart benchmark ma'lumotlar to'plamida o'tkazildi: (1) ETH/UCY — 1 536 ta piyoda trayektoriyasi, 5 xil stsenaiy (ETH, Hotel, Univ, Zarat, Zara2); (2) nuScenes — 1 000 ta sahnali avtomobil harakati, 23 ob'yekt kategoriyasi; (3) Stanford Drone Dataset (SDD) — 11 xil muhit, 19 816 ta trayektoriya. Asosiy baholash mezonlari: ADE (Average Displacement Error) — barcha vaqt qadamlari bo'yicha o'rtacha euklidean xato; FDE (Final Displacement Error) — prognoz gorizonti oxiridagi xato.

4.2. Asosiy taqqoslash natijalari

1-jadvalda ETH/UCY ma'lumotlar to'plamida turli usullar natijalari (ADE/FDE, metr) keltirilgan (prognoz gorizonti: 4.8 soniya, 12 kadr).

1-jadval. ETH/UCY benchmark da trayektoriya prognoz aniqligi (ADE/FDE, m)

Usul	ETH	Hotel	Univ	Zarat	O'rtacha ADE	O'rtacha FDE
Kalman Filter	1.21/2.34	0.43/0.87	0.78/1.52	0.54/1.12	0.74	1.46
Social Force	0.94/1.74	0.37/0.71	0.65/1.23	0.48/0.97	0.61	1.16



Social LSTM	0.72/1.54	0.43/0.94	0.53/1.14	0.41/0.88	0.52	1.13
Social GAN	0.58/1.18	0.29/0.60	0.45/0.97	0.34/0.72	0.42	0.87
Trajectron++	0.43/0.86	0.12/0.19	0.22/0.43	0.17/0.32	0.24	0.45
Gibrid (taklif)	0.31/0.58	0.09/0.14	0.18/0.34	0.13/0.25	0.18	0.33

Taklif etilgan gibrid model barcha ssenariylar bo'yicha eng past xatoni ko'rsatadi. O'rtacha ADE 0.18 m — eng yaxshi raqobatchi Trajectron++ ning 0.24 m dan 25% past. FDE bo'yicha ham 0.33 m vs 0.45 m — 26.7% yaxshilanish. Bu uch qatlamli integratsiyaning (19–20-formulalar) samaradorligini tasdiqlaydi.

4.3. Prognoz gorizontiga qarab tahlil

2-jadvalda nuScenes transport ma'lumotlar to'plamida turli prognoz gorizontlari uchun ADE (metr) taqqoslangan.

2-jadval. Prognoz gorizontiga qarab ADE (m) — nuScenes dataset

Usul	0.5 s	1.0 s	2.0 s	3.0 s	4.0 s
Kalman Filter	0.18	0.47	1.24	2.31	3.86
Social LSTM	0.14	0.38	0.89	1.54	2.43
Trajectron++	0.09	0.24	0.58	1.02	1.67
Gibrid (taklif)	0.07	0.18	0.41	0.73	1.21

Jadval shuni ko'rsatadiki, gibrid modelning ustunligi prognoz gorizonti uzaygan sari ortadi. 4 soniyalik gorizontda Trajectron++ ga nisbatan ADE 27.5% past (1.21 m vs 1.67 m). Bu nohiziqli harakatni modellashtiruvchi LSTM (13–18-formulalar) va noaniqlikni ifodalovchi GP regressiyasining (8–12-formulalar) uzoq gorizontdagi samaradorligini isbotlaydi.

4.4. Natijalar muhokamasi

Gibrid modelning samaradorligi quyidagi asosiy mexanizmlar bilan izohlanadi. Birinchidan, Bayesian EKF (4–7-formulalar) qisqa gorizontda (< 1s) yuqori aniqlik ta'minlaydi, chunki fizika qonunlari bu davrda ustuvorlik qiladi. Ikkinchidan, GP regressiyasi (8–12-formulalar) prognoz noaniqligini kovariansiya matrisi orqali aniq ifodalab, noaniqlik konusini (21-formula) real vaqtda hisoblash imkonini beradi.

Uchinchidan, LSTM ning uzun xotirasi (13–17-formulalar) murakkab ijtimoiy o'zaro ta'sir va taktik naqshlarni o'rganib, uzoq gorizontdagi aniqlikni oshiradi. To'rtinchidan,



dinamik og'irlik tanlash (20-formula) har bir model o'z kuchli tomonida ustunlik qilishini ta'minlaydi. Asosiy cheklov — GP regressiyasining $O(N^3)$ hisoblash murakkabligi katta N da sekinlashishga olib kelishi mumkin. Bu muammoni sparse GP approximation yordamida hal etish kelajakdagi yo'nalish bo'lib xizmat qiladi.

XULOSA VA TAKLIFLAR

Ushbu tadqiqotda dinamik hududlarda ob'yekt trayektoriyasini aniqlash va prognozlashning matematik asoslari — holat fazosi modeli (1-3-formulalar), Bayesian EKF (4-7), GP regressiyasi (8-12), LSTM (13-18) va uch qatlamli gibrid integratsiya (19-21) — ishlab chiqildi. ETH/UCY benchmark da O'rtacha ADE = 0.18 m va FDE = 0.33 m erishildi. Asosiy xulosalar:

1. Uch qatlamli gibrid model (19-20-formulalar) prognoz gorizontiga qarab dinamik og'irlik tanlash orqali barcha raqobatchilardan ustun — ETH/UCY da ADE bo'yicha Trajectron++ dan 25% yaxshiroq (0.18 m vs 0.24 m).

2. GP kovariansiya regressiyasi (8-12-formulalar) prognoz noaniqligini ifodalab, 95% ishonch intervali bilan noaniqlik konusini (21-formula) real vaqtda hisoblash imkonini beradi — bu to'qnashuvsiz rejalashtirish uchun muhim.

3. Singer manyovr modeli (7-formula) va EKF (5-6-formulalar) qisqa gorizontda ($< 1s$) eng past xato — ADE = 0.07 m — ta'minlab, real vaqt boshqaruv tizimlarida bevosita qo'llanilishi mumkin.

4. LSTM temporal modellash (13-18-formulalar) 4 soniyalik uzoq gorizontda Trajectron++ ga nisbatan 27.5% past xato bilan aqlli transport va robot navigatsiyasida amaliy samara beradi.


Kelajakdagi tadqiqotlarda sparse Gaussian jarayonlar yordamida hisoblash yukini kamaytirish, Graph Neural Network (GNN) orqali ko'p ob'yektning o'zaro ta'sirini modellashtirish, shuningdek, kontrafaktual ssenariylarni baholash uchun kauzal inference usullarini gibrid modelga integratsiya qilish mo'ljallangan.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI:

[1] Rudenko A. et al. Human motion trajectory prediction: A survey // The International Journal of Robotics Research. — 2020. — Vol. 39, No. 8. — P. 895-935. DOI: 10.1177/0278364920917446

[2] Lefevre S., Vasquez D., Laugier C. A survey on motion prediction and risk assessment for intelligent vehicles // ROBOMECH Journal. — 2014. — Vol. 1, No. 1. — P. 1-14. DOI: 10.1186/s40648-014-0001-z



- 
- [3] Schöller C. et al. What the constant velocity model can teach us about pedestrian motion prediction // *IEEE Robot. Autom. Lett.* — 2020. — Vol. 5, No. 2. — P. 1696–1703. DOI: 10.1109/LRA.2020.2969925
- [4] Liang J. et al. The garden of forking paths: Towards multi-future trajectory prediction // *Proc. IEEE CVPR.* — 2020. — P. 10508–10518. DOI: 10.1109/CVPR42600.2020.01052
- [5] Huang Z. et al. LSTM based trajectory prediction model for cyclist considering interaction with other participants // *Pattern Recognition.* — 2022. — Vol. 123. — P. 108392. DOI: 10.1016/j.patcog.2021.108392
- [6] Kalman R.E. A new approach to linear filtering and prediction problems // *Trans. ASME J. Basic Eng.* — 1960. — Vol. 82, No. 1. — P. 35–45. DOI: 10.1115/1.3662552
- [7] Singer R.A. Estimating optimal tracking filter performance for manned maneuvering targets // *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* — 1970. — Vol. 6, No. 4. — P. 473–483. DOI: 10.1109/TAES.1970.310128
- [8] Titsias M., Lawrence N.D. Bayesian Gaussian process latent variable model // *Proc. AISTATS.* — 2010. — Vol. 9. — P. 844–851.
- [9] Rasmussen C.E., Williams C.K.I. *Gaussian Processes for Machine Learning.* — MIT Press, 2006. — 248 p.
- [10] Helbing D., Molnar P. Social force model for pedestrian dynamics // *Physical Review E.* — 1995. — Vol. 51, No. 5. — P. 4282–4286. DOI: 10.1103/PhysRevE.51.4282
- [11] Alahi A. et al. Social LSTM: Human trajectory prediction in crowded spaces // *Proc. IEEE CVPR.* — 2016. — P. 961–971. DOI: 10.1109/CVPR.2016.110

