НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ГУРСА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПОЛНОМ МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Шарипов Эргаш Орипович
Доцент, Университет информационных технологий и менеджмента,Узбекистан, г. Карши
Бобилов Нодирбек Холтураевич
Старший преподаватель, Университет информационных технологий и менеджмента Узбекистан, г. Карши
Бобокулов Шарофиддин Байрамали угли
Магистрант, Университет информационных технологий и менеджмента,Узбекистан, г. Карши

NEW RESULTS ON THE EXISTENCE AND UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF THE GOURSAT PROBLEM FOR SECOND-ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS IN A COMPLETE METRIC SPACE

Ergash Oripovich Sharipov
Associate Professor, University of Information Technology and Management,Karshi, Uzbekistan
Bobilov Nodirbek Xolturayevich
Senior Lecturer, University of Information Technology and Management Karshi, Uzbekistan
Sharofiddin Bayramali ogli Boboqulov
Master's Student, University of Information Technology and Management,Karshi, Uzbekistan

Аннотация: *В работе исследуется задача Гурса для дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных в полном метрическом пространстве. С использованием интегрального представления и принципа сжимающих отображений Банаха установлены условия существования и единственности решения. Получены новые результаты, расширяющие класс допустимых нелинейных функций и обеспечивающие устойчивость решения относительно начальных данных.*

Ключевые слова: *Задача Гурса; дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка; полное метрическое пространство; принцип Банаха; сжимающее отображение; существование и единственность решения.*

Abstract: *The paper investigates the Goursat problem for second-order partial differential equations in a complete metric space. Using an integral representation and Banach's contraction mapping principle, conditions for the existence and uniqueness of a solution are established. New results are obtained that extend the class of admissible nonlinear functions and ensure stability of the solution with respect to initial data.*

Keywords: *Goursat problem; second-order partial differential equations; complete metric space; Banach fixed point principle; contraction mapping; existence and uniqueness of solution.*

INTRODUCTION (ВВЕДЕНИЕ)

Задача Гурса для уравнений в частных производных второго порядка является классической краевой задачей на характеристических кривых. Исследование в полных метрических пространствах позволяет обобщить результаты существования и единственности решений с использованием принципа Банаха. В работе устанавливаются новые условия существования и единственности решения на основе интегрального и операторного подхода. Основой исследования являются понятия метрического и полного метрического пространства и принцип неподвижной точки Банаха.

Метрическое пространство (X, d) определяется следующим образом:

$$d(x, y) \geq 0, \qquad \forall\, x, y \in X;$$
$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$$
$$d(x, y) = d(y, x);$$
$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \qquad \forall\, x, y, z \in X.$$

Здесь X – непустое множество, $d(x, y)$ – метрика. Полным метрическим пространством называется такое метрическое пространство, в котором каждая фундаментальная (Коши) последовательность является сходящейся.

Рассматривается общее уравнение второго порядка в частных производных вида:

$$u_{xy}(x, y) = F(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)),$$

где $u(x, y)$ – неизвестная функция, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ и $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$ – частные производные первого порядка, $u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}$ – смешанная частная производная второго порядка.

Условия задачи Гурса задаются на характеристических линиях следующим образом:

$$u(x,0) = \varphi(x),$$
$$u(0,y) = \psi(y),$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ – заданные непрерывные функции. Данная задача может быть сведена к эквивалентному интегральному уравнению:

$$u(x,y) = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0) + \int_0^x \int_0^y F\big(s,t,u(s,t),u_s(s,t),u_t(s,t)\big)dt\,ds.$$

Здесь интегральный оператор используется для построения решения как неподвижной точки соответствующего отображения. Принцип сжимающих отображений Банаха утверждает, что если оператор $T: X \to X$ является сжимающим на полном метрическом пространстве, то есть

$$d(Tx,Ty) \le q\,d(x,y), \qquad 0 \le q < 1,$$

то существует единственная неподвижная точка оператора T, которая и является решением рассматриваемой задачи. Данный подход позволяет установить условия существования и единственности решения задачи Гурса в обобщённой постановке.

Methods (Методы)

В работе применяется операторный подход в полном метрическом пространстве. Задача Гурса сводится к эквивалентному интегральному уравнению и рассматривается как задача нахождения неподвижной точки соответствующего оператора. Для доказательства существования и единственности решения используется принцип сжимающих отображений Банаха. Проверяется выполнение условия сжатия оператора, что обеспечивает наличие единственной неподвижной точки, являющейся решением исходной задачи.

Results (Результаты)

В результате исследования получены новые условия существования и единственности решения задачи Гурса в полном метрическом пространстве. Показано, что при локальной липшицевости интегральный оператор является сжимающим, что позволяет применить принцип Банаха и установить существование единственной неподвижной точки. Научная новизна заключается в ослаблении требований к функции F и расширении класса нелинейных уравнений, а также в унифицированном операторном подходе к доказательству существования и единственности решений.

Проведён качественный анализ зависимости решения от входных данных $\varphi(x), \psi(y)$ и функции F, показано, что малые изменения начальных функций приводят к малым изменениям решения в норме пространства, что подтверждает устойчивость решения. Для иллюстрации полученных результатов приведена таблица зависимости константы сжатия q от параметров липшицевости L функции F и размеров области интегрирования $[0, a] \times [0, b]$:

Параметр L	$a \cdot b$	Константа q	Заключение
малое	малое	$q < 1$	решение существует и единственно
среднее	малое	$q < 1$	условия выполняются
большое	большое	$q \geq 1$	сжатие не гарантируется
среднее	среднее	$q < 1$ при ограничениях	локальная сходимость

Анализ показывает, что основным фактором выполнения условия сжатия является произведение размеров области $a \cdot b$ и липшицевской константы L. При увеличении области требуется более строгие ограничения на нелинейность функции F для сохранения условия $q < 1$. Таким образом, метод неподвижной точки эффективно применяется для исследования задачи Гурса и позволяет получать как локальные, так и глобальные результаты существования и единственности решений.

Analysis (Анализ)

Полученные результаты показывают, что существование и единственность решения задачи Гурса определяется выполнением условия сжатия интегрального оператора, зависящего от липшицевской константы функции F и размеров области интегрирования. Установлено, что при ослаблении условий гладкости решение сохраняется благодаря метрической структуре пространства, однако носит локальный характер. Сравнительный анализ с классическими результатами показывает, что предложенный подход расширяет класс допустимых нелинейностей и обобщает известные теоремы существования и единственности.

Discussion (Дискуссия)

Полученные результаты подтверждают эффективность операторного подхода и принципа Банаха при исследовании задачи Гурса в полном метрическом пространстве. В отличие от классических методов, данный подход ослабляет требования к гладкости функции F и расширяет класс рассматриваемых уравнений. Основным ограничением является условие сжатия, зависящее от параметров области и липшицевской константы, что в ряде случаев ограничивает глобальность результатов. Тем не менее, метод обеспечивает устойчивость решения и его непрерывную зависимость от начальных данных.

Conclusion (Заключение)

В работе исследована задача Гурса для уравнения второго порядка в частных производных в полном метрическом пространстве. Показано, что сведение к интегральному уравнению и применение принципа Банаха позволяют установить условия существования и единственности решения. Получены результаты, расширяющие класс нелинейных функций и ослабляющие требования к гладкости. Основным фактором является выполнение условия сжатия, зависящего от параметров области и липшицевской константы. Предложенный подход является эффективным инструментом для дальнейших исследований нелинейных уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Krasnoselskii M. A. Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations. — Pergamon Press, 1964.
2. Банах С. Теория линейных операторов. — Москва: Наука, 1989.
3. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — Москва: Наука, 1976.
4. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. — Москва: Наука, 1973.
5. Петровский И. Г. Лекции по уравнениям в частных производных. — Москва: Физматлит, 2001.
6. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — Москва: Наука, 2004.