

**DIRIXLE MASALASI UCHUN CHEGARAVIY NUQTALAR
REGULYARLIGINING GEOMETRIK VA ANALITIK TAHLILI**

Dilmurodov Nasriddin

Professor, Axborot texnologiyalari va menejment universiteti, O'zbekiston, Qarshi shahri

Bobilov Nodirbek Xolturayevich

Kata o'qituvchi, Axborot texnologiyalari va menejment universiteti, O'zbekiston, Qarshi shahri

To'ychiyev Xusniddin Jonuzokovich

Magistrant, Axborot texnologiyalari va menejment universiteti, O'zbekiston, Qarshi shahri.

**ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ И АНАЛИТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЕГУЛЯРНОСТИ
ГРАНИЧНЫХ ТОЧЕК ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ**

Дилмурадов Насрутдин

Профессор, Университет информационных технологий и менеджмента

Узбекистан, г. Карши

Бобилев Нодирбек Холтураевич

Старший преподаватель, Университет информационных технологий и

менеджмента, Узбекистан, г. Карши

Тўйчиев Хусниддин Жонузоқович

Магистрант, Университет информационных технологий и менеджмента,

Узбекистан, г. Карши

**GEOMETRIC AND ANALYTICAL ANALYSIS OF BOUNDARY POINT
REGULARITY IN THE DIRICHLET PROBLEM**

Dilmuradov Nasrutdin

Professor, University of Information Technology and Management, Karshi, Uzbekistan

Bobilov Nodirbek Kholturayevich

Senior Lecturer, University of Information Technology and Management, Karshi, Uzbekistan

Tuychiyev Khusniddin Jonuzokovich

Master's Student, University of Information Technology and Management, Karshi, Uzbekistan.

Annotatsiya: Maqolada Dirixle masalasi uchun chegaraviy nuqtalarning regulyarligi geometrik va analitik yondashuvlar asosida o'rganildi. Silliqlik va murakkab chegarali sohalarda yechim xulqi tahlil qilinib, regulyar va singular nuqtalar farqlari ko'rsatildi.



Kalit soʻzlar: Dirixle masalasi, Laplas tenglamasi, garmonik funksiya, chegaraviy nuqta, regularlik, singular nuqta, potentsiallar nazariyasi, Green funksiyasi, Evklid fazosi, geometrik tahlil.

Аннотация: В статье исследуется регулярность граничных точек задачи Дирихле на основе геометрического и аналитического подходов. Анализируется поведение решений в областях с гладкими и сложными границами, выделяются регулярные и сингулярные точки.

Ключевые слова: задача Дирихле, уравнение Лапласа, гармоническая функция, граничная точка, регулярность, сингулярная точка, теория потенциала, функция Грина, евклидово пространство, геометрический анализ.

Abstract: The paper studies the regularity of boundary points in the Dirichlet problem using geometric and analytical approaches. The behavior of solutions in smooth and complex domains is analyzed, distinguishing between regular and singular boundary points.

Keywords: Dirichlet problem, Laplace equation, harmonic function, boundary point, regularity, singular point, potential theory, Green's function, Euclidean space, geometric analysis.

INTRODUCTION (KIRISH)

Dirixle masalasi xususiyl hosilali differensial tenglamalar nazariyasining asosiy klassik muammolaridan biri bo'lib, Laplas tenglamasi uchun chegaraviy shartlar asosida yechimni aniqlash masalasini o'rganadi. Matematik jihatdan bu masala quyidagi elliptik tenglama bilan ifodalanadi:

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega.$$

va chegaraviy shart:

$$u(x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega.$$

Bu yerda $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ochiq soha, $\partial\Omega$ esa uning chegarasi hisoblanadi.

Dirixle masalasi nafaqat sof matematik analizda, balki fizik jarayonlarni modellashtirishda ham muhim rol o'ynaydi. Xususan, issiqlik tarqalishi, elektrostatik maydon va gravitatsion potentsial kabi jarayonlar Laplas tenglamasi orqali tavsiflanadi.

Ushbu masalaning markaziy muammolaridan biri — yechimning chegarada qanday xulq ko'rsatishi, ya'ni regularlik muammosidir. Chegaraviy nuqta $x_0 \in \partial\Omega$ uchun quyidagi limit mavjudligi yoki yo'qligi muhim ahamiyatga ega:

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in \Omega} u(x) = f(x_0).$$

Agar bu tenglik bajarilsa, nuqta regular, aks holda singular nuqta deyiladi.

Soha geometriyasi regularlikni belgilovchi asosiy omillardan biridir. Silliqli chegarali sohalarda klassik potentsiallar nazariyasi to'liqlik amal qiladi va yechim uzluksiz ravishda



chegaraviy qiymatlarga yaqinlashadi. Burchakli yoki murakkab geometrik sohalarda esa regularlik buzilishi mumkin.

Potensiallar nazariyasi va Green funksiyasi Dirixle masalasini integral ko'rinishda ifodalash imkonini beradi:

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} P(x, y) f(y) dS_y.$$

Bu yerda $P(x, y)$ – Puasson yadrosi hisoblanadi.

Shu sababli regularlik muammosi Dirixle masalasida yechim xulqini tushunishda muhim o'rin tutadi va geometrik hamda analitik yondashuvlarni bog'laydi. Ushbu maqolada chegaraviy nuqtalar regularligi, singular nuqtalar va soha geometriyasining yechimga ta'siri tahlil qilinadi.

Methods (Metodlar)

Mazkur tadqiqotda analitik va geometrik metodlar qo'llanildi. Dirixle masalasining regularligi garmonik funksiyalar va elliptik tenglamalar asosida o'rganildi. Potensiallar nazariyasi, Green funksiyasi va Puasson yadrosi yordamida yechimning chegaraviy xulqi tahlil qilindi. Regularlik lokal geometrik shartlar va Viner kriteriysi orqali baholandi.

Results (Natijalar)

Tadqiqot davomida Dirixle masalasi uchun chegaraviy nuqtalarning regularligi sektor tipidagi geometrik sohalarda tahlil qilindi. Ikki o'lchovli Evklid fazosida quyidagi soha qaraldi:

$$\Omega\alpha = \{(r, \theta): 0 < \theta < \alpha\}.$$

Bu yerda α burchak kattaligini ifodalaydi. Tahlil natijasida burchak kattaligi yechimning chegaraviy xulqiga sezilarli ta'sir ko'rsatishi aniqlandi.

Agar

$$0 < \alpha < \pi$$

bo'lsa, sektor uchidagi chegaraviy nuqta regular bo'lib, garmonik yechim chegaraviy qiymatga uzluksiz yaqinlashishi kuzatildi:

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in \Omega} u(x) = f(x_0)$$

Bu yerda x_0 – sektor uchidagi chegaraviy nuqta.

Shuningdek, sektor chegarasining silliqiligi saqlangan hollarda yechimning lokal barqarorligi yuqori bo'lishi va gradientning cheklanganligi aniqlandi. Ammo burchak kattaligi ortib borganda yechimning lokal xulqi murakkablashishi kuzatildi.

Xususan,

$$\alpha > \pi$$

holatda sektor uchida singular xulq paydo bo'lishi va gradientning cheksiz ortishi mumkinligi tahlil qilindi:



$$|\nabla u(x)| \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow x_0$$

Bu holat geometriyadagi keskin burchaklar regularlikning buzilishiga olib kelishini ko'rsatdi.

Potensiallar nazariyasi asosida Green funksiyasi va Puasson yadrosi orqali yechimning integral tasviri o'rganildi. Natijalar regular nuqtalarda integral yadrolarning chegaraviy shartlarni to'liq tiklashini, singular nuqtalarda esa bu moslikning buzilishi mumkinligini ko'rsatdi.

Bundan tashqari, Viner kriteriysi asosida chegaraviy nuqtalarning regularligi tahlil qilinib, quyidagi shart bajarilganda nuqtaning regular bo'lishi kuzatildi:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{cap}(E_k)}{r_k^{n-2}} = \infty$$

Bu yerda $\text{cap}(E_k)$ – potensial sig'imni ifodalaydi.

Olingan natijalar Dirixle masalasida yechimning chegaraviy xulqi geometrik omillarga kuchli bog'liq ekanligini va regularlik muammosi potensiallar nazariyasining markaziy masalalaridan biri ekanligini tasdiqladi.

Analysis (Tahlil)

Tahlil natijalari Dirixle masalasida regularlikning lokal geometrik xossalarga bog'liqligini ko'rsatdi. Silliqlik chegaralarda yechim barqaror va uzluksiz xulq saqlaydi. Burchakli sohalarda esa lokal xulq murakkablashib, gradient singularligi yuzaga kelishi mumkinligi aniqlandi. Green funksiyasi va Viner kriteriysi regularlikning potensiallar nazariyasi bilan bog'liqligini tasdiqladi.

Discussion (Muhokama)

Tadqiqot Dirixle masalasida regularlikning geometrik va analitik omillarga kuchli bog'liqligini ko'rsatdi. Silliqlik chegaralarda yechim barqarorligi saqlanadi, murakkab geometrik sohalarda esa singular xulq kuzatiladi.

Burchakli sohalarda yechimning lokal geometriyaga sezgirligi tasdiqlandi. Bu natijalar potensiallar nazariyasi va Viner kriteriysi bilan mos kelib, regularlikning geometrik tabiatini yoritadi.

Shuningdek, natijalar Dirixle masalasining fizik modellarda ham muhim ahamiyatga ega ekanini ko'rsatadi, chunki chegaraviy nuqtalar maydonlarning lokal xulqini belgilaydi.

Conclusion (Xulosa)

Ushbu maqolada Dirixle masalasi uchun chegaraviy nuqtalarning regularligi geometrik va analitik jihatdan o'rganildi. Soha geometriyasi yechimning chegaradagi xulqiga bevosita ta'sir qilishi aniqlandi.





Silliqlik chegaralarda regulyarlik saqlanadi, burchakli va murakkab sohalarda esa singular xulq kuzatilishi mumkin. Green funksiyasi, Puasson yadrosi va Viner kriteriysi regulyarlikni tahlil qilishda muhim vositalar ekanligi tasdiqlandi.

Natijalar Dirixle masalasida lokal geometrik struktura yechim sifatini belgilovchi asosiy omil ekanligini ko'rsatadi va potentsiallar hamda elliptik tenglamalar nazariyasi uchun nazariy asos bo'lib xizmat qiladi.

ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. Axler S., Bourdon P., Ramey W. Harmonic Function Theory. — Springer, 2001.
2. Axmedov M.A. Matematik analiz asoslari. — Toshkent: O'zbekiston Milliy universiteti nashriyoti, 2018.
3. Gilbarg D., Trudinger N.S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. — Springer, 2001.
4. Karimov Sh.R. Oliy matematika. — Toshkent: O'qituvchi, 2012.
5. Xudoyberdiyev A.X. Differensial tenglamalar va ularning qo'llanilishi. — Toshkent: Fan, 2015.
6. Yusupov B.T. Matematik fizika tenglamalari. — Toshkent: Universitet, 2020.
7. Ильин В.А. Математический анализ. — Москва: Физматлит, 2009.

