

СОВРЕМЕННЫЕ ПОДХОДЫ К ИССЛЕДОВАНИЮ И РЕШЕНИЮ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Рахимов Холмурот Абдуллаевич

Доцент, Университет экономики и педагогики, Узбекистан, г. Карши

Сатторова Зубайда Гуломовна

*Магистрант, Университет информационных технологий и менеджмента,
Узбекистан, Карши*

Аннотация: В данной работе рассматриваются современные подходы к исследованию и решению краевых задач для эллиптических уравнений. Анализируются основные методы решения, включая классические аналитические и вариационные подходы, а также методы, основанные на использовании функций Грина. Особое внимание уделяется условиям существования, единственности и устойчивости решений. Показано, что современные методы позволяют эффективно исследовать широкий класс краевых задач, возникающих в математической физике и теории дифференциальных уравнений. Полученные результаты могут быть применены в прикладных задачах математического анализа.

Ключевые слова: Эллиптические уравнения, краевые задачи, задача Дирихле, задача Неймана, функция Грина, вариационные методы, математическая физика.

ВВЕДЕНИЕ

Эллиптические уравнения второго порядка являются одним из основных классов уравнений математической физики, описывающих стационарные процессы. Краевые задачи для таких уравнений возникают при моделировании теплопроводности, электростатики и других физических явлений.

Актуальность исследования обусловлена необходимостью развития современных методов решения краевых задач и анализа условий существования решений. Целью данной работы является изучение современных подходов к решению краевых задач для эллиптических уравнений и исследование их свойств.

Основная часть. Рассматривается общее эллиптическое уравнение второго порядка:

$$Lu = f \text{ в области } \Omega,$$

где L – линейный эллиптический дифференциальный оператор.

Основными типами краевых задач являются задача Дирихле и задача Неймана. В задаче Дирихле задаётся значение функции на границе:

$$u|_{\partial\Omega} = g,$$

а в задаче Неймана задаётся нормальная производная:

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} = h.$$

Современные подходы к решению включают:

- метод разделения переменных;
- использование функций Грина;
- вариационные методы;
- методы слабых решений в пространствах Соболева.

Показано, что вариационный подход позволяет свести краевую задачу к задаче минимизации функционала энергии. Это обеспечивает существование слабого решения при достаточно общих условиях.

Также рассматриваются условия единственности и устойчивости решений, связанные с эллиптичностью оператора и свойствами области.

Заключение.

В работе рассмотрены современные методы исследования краевых задач для эллиптических уравнений.

Установлено, что вариационные и функционально-аналитические методы являются наиболее универсальными и эффективными при исследовании существования и устойчивости решений.

Показано, что сочетание классических и современных подходов позволяет расширить класс решаемых задач и повысить точность анализа.

Полученные результаты имеют важное значение для теории дифференциальных уравнений и прикладной математики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Evans L. C. Partial Differential Equations. AMS, 2010.
2. Gilbarg D., Trudinger N. S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Springer, 2001.
3. Ladyzhenskaya O. A. The Boundary Value Problems of Mathematical Physics. Springer, 1985.
4. Kreyszig E. Introductory Functional Analysis with Applications. Wiley, 1989.
5. Courant R., Hilbert D. Methods of Mathematical Physics. Wiley, 1989.
6. Folland G. B. Introduction to Partial Differential Equations. Princeton University Press, 1995.
7. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. Москва, 1981.
8. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. Москва, 1999.