

GAMMERSHTEYN TIPIDAGI ARGUMENTI SILJIGAN INTEGRAL-DIFFERENSIAL TENGLAMALARGA QISQARTIRIB AKSLANTIRISH PRINSIPINING TATBIQI

G.A.Qayumova

Axborot texnologiyalari va menejment universiteti, dotsenti

U.R.Sharipova

Axborot texnologiyalari va menejment universiteti, magistranti

Annotatsiya: Maqolada argumenti siljigan Gammershteyn tipidagi integral-differensial tenglamalar uchun qisqartirib akslantirish prinsipining tatbiqi o'rganilgan. Avvalo, berilgan integral tenglamaga mos operator qurilib, uning uzluksizlik, chegaralanganlik va qisqartiruvchi akslantirish xossalari tadqiq etilgan. Operatorning Lipshits sharti hamda yadro funksiyaning chegaralanganligi asosida qisqartiruvchi akslantirish ekanligi ko'rsatilib, Banaxning qo'zg'almas nuqta teoremasi yordamida yechimning mavjudligi va yagonaligi isbotlangan. Shuningdek, olingan nazariy natijalar argumenti siljigan integral tenglamalar uchun maxsus misol yordamida asoslangan. Tadqiqot natijalari funksional analiz, integral-differensial tenglamalar nazariyasi hamda matematik modellashtirish masalalarida qo'llaniladi.

Kalit so'zlar: Argumenti siljigan integral-differensial tenglama, Gammershteyn operatori, qisqartirib akslantirish prinsipi, Banax teoremasi, qo'zg'almas nuqta, funksional analiz, integral operator, Lipshits sharti, mavjudlik, yagonalik, Banax fazosi, metrik fazo, operator tenglama.

Argumenti siljigan differensial tenglamalarning matematik qo'yilishi, ularning integral ko'rinishga keltirilishi hamda Banaxning qisqartirib akslantirish prinsipining nazariy asoslari o'rganildi. Mazkur paragrafda ushbu nazariy natijalar Gammershteyn tipidagi argumenti siljigan integral-differensial tenglamalarga tatbiq etiladi.

Ma'lumki, ko'plab amaliy masalalar matematik modellashtirilganda hosil bo'ladigan differensial tenglamalar integral operatorlar orqali ifodalanadi. Ayniqsa, biologik jarayonlar, populyatsiyalar dinamikasi, boshqaruv tizimlari, issiqlik almashinuvi hamda iqtisodiy modellarni tadqiq etishda Gammershteyn tipidagi integral tenglamalar muhim o'rin tutadi. Agar modelda kechikish yoki vaqt bo'yicha siljish mavjud bo'lsa, u holda integral operator tarkibida ham siljigan argument paydo bo'ladi.



Shu sababli argumenti siljigan integral-differensial tenglamalar uchun yechimlarning mavjudligi va yagonaligini tadqiq etishda qisqartirib akslantirish prinsipi samarali metodlardan biri hisoblanadi.

Gammershteyn operatori va uning xossalari. Quyidagi integral tenglamani qaraymiz.

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t, s) F(s, x(s - \tau)) ds, \quad (1)$$

bu yerda $f(t) \in C[a, b]$, $K(t, s) \in C([a, b] \times [a, b])$, $\tau > 0$ - argumentning siljish parametri, $\lambda \in \mathbb{R}$ - esa parametrdir. (1) tenglama **argumenti siljigan Gammershteyn tipidagi integral tenglama** deyiladi.

Endi quyidagi operatorni kiritamiz:

$$(Hx)(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t, s) F(s, x(s - \tau)) ds.$$

U holda (1) tenglama quyidagi ko'rinishdagi operator tenglamaga aylanadi:

$$Hx = x$$

Demak, masala operatorning **qo'zg'almas nuqtasini** topish masalasiga keltirildi.

Lemma.1. Agar $K(t, s)$ va $F(s, x)$ funksiyalar uzluksiz bo'lsa, Gammershteyn operatori $H : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ uzluksiz operator bo'ladi.

Isbot. Haqiqatan ham, $x_n \rightarrow x$ bo'lsin. U holda funksiyaning uzluksizligiga ko'ra:

$$F(s, x_n(s - \tau)) \rightarrow F(s, x(s - \tau)).$$

Funksiyalarning uzluksizligi va integralning uzluksizlik xossasidan:

$$Hx_n \rightarrow Hx$$

kelib chiqadi. Demak, operator uzluksiz. Lemma isbotlandi. Operatorning chegaralanganligi

Lemma.2. Agar $|K(t, s)| \leq M$ va $|F(s, x)| \leq N$ shartlar bajarilsa, operator chegaralangan bo'ladi.

Isbot. Operator ta'rifidan foydalanib, modul ostiga o'tamiz:

$$|(Hx)(t)| \leq |f(t)| + |\lambda| \int_a^b |K(t, s)| \cdot |F(s, x(s - \tau))| ds.$$

Berilgan shartlarni tengsizlikka qo'yib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$|(Hx)(t)| \leq \|f\| + |\lambda| MN(b - a).$$

Demak, normada:

$$\|Hx\| \leq \|f\| + |\lambda| MN(b - a) < \infty.$$



Shunday qilib, operator chegaralangan. Lemma isbotlandi.

Operatorning qisqartiruvchi ekanligi. Endi Banax teoremasini qo'llash uchun operatorning qisqartiruvchi ekanligini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, $F(s, x)$ funksiya ikkinchi argumenti bo'yicha **Lipshits shartini** qanoatlantirsin:

$$|F(s, u) - F(s, v)| \leq L |u - v|.$$

Teorema.1. Agar

$$|\lambda| ML(b-a) < 1 \quad (2)$$

bo'lsa, Gammershteyn operatori qisqartiruvchi akslantirish bo'ladi.

Isbot. Ixtiyoriy $x, y \in C[a, b]$ uchun operatorlar ayirmasini qaraymiz:

$$|(Hx)(t) - (Hy)(t)| = \left| \lambda \int_a^b K(t, s) (F(s, x(s-\tau)) - F(s, y(s-\tau))) ds \right|.$$

Modul belgisini integral ostiga kiritsak:

$$|(Hx)(t) - (Hy)(t)| \leq |\lambda| \int_a^b |K(t, s)| \cdot |F(s, x(s-\tau)) - F(s, y(s-\tau))| ds.$$

Lipshits sharti va yadro chegaralanganligidan foydalanamiz:

$$|(Hx)(t) - (Hy)(t)| \leq |\lambda| ML \int_a^b |x(s-\tau) - y(s-\tau)| ds.$$

Maksimum norma ($C[a, b]$ fazoda) ga o'tsak,

$$\|Hx - Hy\| \leq |\lambda| ML(b-a) \|x - y\|.$$

shartga ko'ra $q = |\lambda| ML(b-a) < 1$ deb belgilasak, unda:

$$\|Hx - Hy\| \leq q \|x - y\|.$$

Shunday qilib, operator qisqartiruvchi akslantirishdir. Teorema isbotlandi.

Mavjudlik va yagonalik haqidagi asosiy teorema

Teorema.2. Faraz qilaylik, quyidagi shartlar bajarilsin:

1. $K(t, s) \in C([a, b] \times [a, b])$;
2. $F(s, x)$ uzluksiz bo'lsin;
3. $F(s, x)$ ikkinchi argumenti bo'yicha Lipshits shartini qanoatlantirsin;
4. $|\lambda| ML(b-a) < 1$.

U holda argumenti siljigan Gammershteyn tipidagi (1) integral tenglama $C[a, b]$ fazoda **yagona yechimga** ega bo'ladi.

Isbot. Teorema.1. ga ko'ra, kiritilgan H operatori qisqartiruvchi akslantirishdir. $C[a, b]$ fazosi esa to'liq metrik fazo, ya'ni Banax fazosi hisoblanadi.

Shuning uchun, **Banaxning qisqartirib akslantirish prinsipiga** asosan, H operatori yagona qo'zg'almas nuqtaga ega. Operatorning qo'zg'almas



nuqtasi esa berilgan integral tenglamaning yechimi bilan ustma-ust tushadi[8]. Demak, tenglama yagona yechimga ega.

Teorema isbotlandi.

Natija. Yuqoridagi teoremadan quyidagi muhim natija kelib chiqadi:

Natija.1. Agar $F(s, x) = x$ bo'lsa (ya'ni chiziqli hol), u holda:

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t, s)x(s - \tau)ds$$

chiziqli argumenti siljigan integral tenglama ham yagona yechimga ega bo'ladi.

Misol. Quyidagi tenglamani qaraymiz:

$$x(t) = \cos t + \lambda \int_0^{2\pi} \sin(t-s)x\left(s - \frac{\pi}{2}\right)ds.$$

Bu yerda:

- $f(t) = \cos t$,
- $K(t, s) = \sin(t-s)$,
- $F(s, x) = x \Rightarrow L = 1$.

Ma'lumki, $|\sin(t-s)| \leq 1$, demak $M = 1$. Integrallash chegaralari esa $a = 0$ va $b = 2\pi$.

Agar parametr uchun $|\lambda| < \frac{1}{2\pi}$ shart bajarilsa, u holda:

$$q = |\lambda| \cdot M \cdot L \cdot (b-a) = |\lambda| \cdot 1 \cdot 1 \cdot (2\pi - 0) = 2\pi |\lambda| < 1.$$

Shuning uchun Banax teoremasiga ko'ra[7], berilgan argumenti siljigan integral tenglama yagona yechimga ega bo'ladi.

Mazkur paragrafda argumenti siljigan Gammershteyn tipidagi integral tenglamalar uchun qisqartirib akslantirish prinsipi qo'llandi[9]. Mos integral operator qurildi hamda uning uzluksizlik, chegaralanganlik va qisqartiruvchi akslantirish xossalari o'rganildi. Operatorning qisqartiruvchi ekanligi Lipshits sharti va $|\lambda| ML(b-a) < 1$ tengsizlik yordamida asoslandi[6].

Banaxning qo'zg'almas nuqta teoremasi asosida argumenti siljigan Gammershteyn tipidagi integral tenglamalar yechimining mavjudligi va yagonaligi isbotlandi[4]. Olingan natijalar keyingi paragrafda argumenti siljigan differensial tenglamalar uchun qisqartirib akslantirish prinsipini qo'llashga nazariy asos bo'lib xizmat qiladi.



Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Abdullayev J.I., G'anixo'jayev R.N., Shermatov M.H., Egamberdiyev O.I. Funktsional analiz. – Toshkent: Fan va texnologiya, 2009. – 356 b.
2. Agarwal R.P., O'Regan D. Functional Differential Equations. – New York: Springer, 2008. – 454 p.
3. Ayupov Sh.A., Berdiqulov M.A., Turg'unboyev R.M. Funktsional analiz. – Toshkent: Universitet, 2008. – 320 b.
4. Abdishukurovna Q. B., Abdushukurovna Q. G. QISQARTIRIB AKS ETTIRISH PRINTSIPINI TADBIQLARI //Лучшие интеллектуальные исследования. – 2026. – Т. 62. – №. 1. – С. 29-35.
5. Burton T.A. Volterra Integral and Differential Equations. – Amsterdam: Elsevier, 2005. – 202 p.
6. Eshmatov B., Kayumova G. On a problem for a parabolic-hyperbolic fractional order equation with degeneration in time //American Institute of Physics Conference Series. – 2021. – Т. 2365. – №. 1. – С. 070009.
7. Qayumova G. A. Matematika fanini o 'qitishda talabalarning mustaqil ishlash kompetentsiyani rivojlantirish //Экономика и социум. – 2024. – №. 11-2 (126). – С. 343-348.
8. Qayumova G. RAQAMLASHTIRILGAN MUHITDA MUSTAQIL ISHLASH KOMPETENSIYASINI RIVOJLANTIRISHDA AXBOROT TEXNOLOGIYALARNING O'RNI //Science and innovation. – 2022. – Т. 1. – №. B8. – С. 505-508.
9. Кадиркулов Б. Ж., Каюмова Г. А. Нелокальная задача для уравнения смешанного типа дробного порядка с инволюцией //Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. – 2022. – Т. 210. – №. 0. – С. 55-65.

