

GARMONIK FUNKSIYA VA UNING SODDA XOSSALARI

Dilmurodov Nasriddin

Professor,

*Axborot texnologiyalari va menejment universiteti,
O'zbekiston, Qarshi shahri*

Xolov Komil Normamatovich

dotsent,

*Axborot texnologiyalari va menejment universiteti,
O'zbekiston, Qarshi shahri*

To'ychiyev Xusniddin Jonuzokovich

magistrant,

*Axborot texnologiyalari va menejment universiteti,
O'zbekiston, Qarshi shahri.*

Annotatsiya: Ushbu maqolada garmonik funksiyalar va ularning Laplas tenglamasi bilan bog'liq asosiy xossalari o'rganilgan. Garmonik funksiyaning invariantlik xossalari, Kelvin almashtirishi hamda o'rtacha qiymat teoremasi tahlil qilingan. Shuningdek, Lebeg misoli orqali Dirixle masalasining ba'zi sohalarida yechimga ega bo'lmashligi ko'rsatib berilgan. Natijalar garmonik funksiyalar nazariyasining geometrik va analitik jihatlarini chuqurroq tushunishga xizmat qiladi.

Kalit so'zlar: Garmonik funksiya, Laplas tenglamasi, Kelvin almashtirishi, o'rtacha qiymat teoremasi, Dirixle masalasi, Lebeg misoli, potentsiallar nazariyasi, analitik funksiya, sath sirtlari, invariantlik.

Abstract: This paper studies harmonic functions and their main properties related to the Laplace equation. Invariance properties, Kelvin transformation, and the mean value theorem are analyzed. Lebesgue's example is also discussed, showing that the Dirichlet problem may have no solution in certain domains. The results provide a deeper understanding of both geometric and analytical aspects of harmonic function theory.

Keywords: Harmonic function, Laplace equation, Kelvin transformation, mean value theorem, Dirichlet problem, Lebesgue example, potential theory, analytic function, level surfaces, invariance.

Аннотация: В данной статье рассматриваются гармонические функции и их основные свойства, связанные с уравнением Лапласа. Анализируются свойства инвариантности, преобразование Кельвина и



теорема о среднем значении. Также приведён пример Лебега, показывающий, что задача Дирихле может не иметь решения в некоторых областях. Результаты способствуют более глубокому пониманию геометрических и аналитических аспектов теории гармонических функций.

Ключевые слова: Гармоническая функция, уравнение Лапласа, преобразование Кельвина, теорема о среднем значении, задача Дирихле, пример Лебега, теория потенциала, аналитическая функция, поверхности уровня, инвариантность.

Kirish

Garmonik funksiyalar matematik analiz va matematik fizikaning muhim yo'nalishlaridan biri bo'lib, ular Laplas tenglamasining yechimlari sifatida aniqlanadi. Ushbu funksiyalar potentsiallar nazariyasi, differensial tenglamalar va geometrik analizda keng qo'llaniladi. Maqolada garmonik funksiyaning asosiy xossalari, ularning invariantlik xususiyatlari, Kelvin almashtirishi hamda o'rtacha qiymat teoremasi qisqacha yoritiladi. Shuningdek, Dirixle masalasining ba'zi hollarda yechimga ega bo'lmashligi Lebeg misoli orqali ko'rsatib beriladi.

Ushbu ishning maqsadi garmonik funksiyalar nazariyasining asosiy tushunchalari va ularning muhim xossalarini qisqa va tushunarli shaklda bayon etishdan iborat.

Adabiyotlar tahlili. Agar $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n) = u(x)$ haqiqiy qiymatli funksiya D sohada ikkinchi tartibli uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lib $(u \in C^2(D))$, u D da ushbu

$$\Delta u = 0 \quad \left(\Delta u \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \right) u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right) \quad (1)$$

Laplas tenglamasini qanoatlantirsa, bunday u funksiya D sohada garmonik deb ataladi.

Masalan, $n=1$ holida Laplas tenglamasi

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0 \quad (x - \text{haqiqiy o'zgaruvchi})$$

ko'rinishga keladi. Bu tenglamaning yechimi, ravshanki, chizqli funksiyalardan iborat bo'ladi:

$$u = kx + b \quad (k, b - \text{const}).$$



Demak, bir haqiqiy o'zgaruvchining har qanday garmonik funksiyasi chiziqli funksiyadir.

Argumentlar soni ikki va undan ortiq bo'lsa,

$$u = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_n x_n + b$$

chiziqli (aniqrog'i: affin) garmonik funksiyalardan boshqa garmonik funksiyalar ham mavjud. Masalan, $n=2$ holida $u = k \ln(x_1^2 + x_2^2) + b$ funksiya

$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$ sohada, $n \geq 3$ holida esa $u = \frac{k}{r^{n-2}}$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$, funksiya $D = \mathbb{R}^n \setminus \{(0;0;\dots;0)\}$ sohada garmonik bo'ladi.

Ravshanki, fazoni tayinlangan $a \in \mathbb{R}^n$ vektorga parallel ko'chirishda, ya'ni $x \rightarrow x + a$ almashtirilishida D sohada garmonik funksiya $\tilde{D} = D + a = \{x + a | x \in D\}$ sohada garmonik funksiya o'tadi. Bunda Laplas operatori invariant bo'ladi (o'zgarmaydi).

Fazoni $x \rightarrow kx$ ($k \neq 0$) gomotetik almashtirilishida ham funksiyaning garmonikligi saqlanadi. Bunda Laplas operatori k^2 ga ko'payadi.

Ortogonal almashtirish, $x \rightarrow Ax$, A – ortogonal matritsa, ya'ni $A^{-1} = A^*$ (* – transpozitsiya belgisi), bajarilganda garmonik funksiya garmonik funksiya bilan almashadi. Bunda Laplas operatori invariant bo'ladi.

$\mathbb{R}^n$ ($n > 2$) fazoda $S_1(0) = \{x | |x| < 1\}$ birlik sferaga nisbatan inversiya almashtirilishini qaraylik:

$$x = \frac{1}{|\tilde{x}|^2} \tilde{x}, \quad \tilde{x} = \frac{1}{|x|^2} x.$$

Bu almashtirishda $S_1(0)$ sfera nuqtalari qo'zg'almaydi, bu sfera tashqarisi uning ichiga, ichi esa tashqarisiga akslanadi. $u(x)$ funksiya dan ushbu

$$\tilde{u}(\tilde{x}) = \frac{1}{|\tilde{x}|^{n-2}} u\left(\frac{\tilde{x}}{|\tilde{x}|^{n-2}}\right) \quad (2)$$

funksiyani tuzaylik. Bu Kelvin almashtirishi deyiladi. $\tilde{D}$ bilan D ning qaralayotgan inversidagi aksini belgilaylik.

Teorema1. Agar $u(x)$ funksiya D da garmonik bo'lsa, $u(x)$ dan Kelvin almashtirishi (2) orqali topilgan $\tilde{u}(\tilde{x})$ funksiya $\tilde{D}$ da garmonik bo'ladi.

Bu tasdiq bevosita (lekin ancha uzoq hisoblashlar yordamida) tekshiriladigan quyidagi ayniyatdan kelib chiqadi:



$$\Delta \tilde{u}(\tilde{x}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_j^2} = \frac{1}{|\tilde{x}|^{n+2}} \Delta u(x).$$

Kelvin almashtirishini $a \in \mathbb{R}^n$ markazli birlik (yoki r radiusli) sfera $S_1(a)$ ($S_r(a)$)ga nisbatan ham aniqlash mumkin. Bunda ham garmonik funksiya hosil bo'ladi.

Agar D soha cheksiz uzoqlashgan nuqtani o'z ichiga olsa, garmonik funksiya cheksizlikda ($|x| \rightarrow \infty$) $n=2$ holida chegaralanganlik, $n>2$ holida esa kamida $|x|^{2-n}$ kabi nolga intilish talab qilinadi.

Garmonik funksiyaning quyidagi xossasi o'rtacha (arifmetik) qiymat teoremasi deyiladi:

Teorema 2. D sohada $u(x)$ funksiya garmonik bo'lib, $\bar{B}_r(x_0)$ yopiq shar D da joylashsa, bu funksiyaning shar markazidagi qiymati uning $S_r(x_0)$ sferadagi o'rtacha (arifmetik) qiymatiga teng:

$$u(x_0) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{S_r(x_0)} u(x) ds_x. \quad (3)$$

bu yerda $\omega_n = \frac{1}{\Gamma(n/2)} 2\pi^{n/2} - \mathbb{R}^n$ dagi birlik sfera ($|x|=1$) sirt yuzasi (Γ – gamma-funksiya), $\omega_n r^{n-1} = \int_{S_r(0)} ds_x$ – r radiusli sfera sirt yuzasi, ds_x – $S_r(x_0)$ ($|x-x_0|=r$) sfera yuza elementi.

Agar (3) formulani $|x-x_0|=\rho \leq r$ sfera uchun

$$\rho^{n-1} u(x_0) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|x-x_0|=\rho} u(x) ds_x$$

ko'rinishda yozib, uni ρ bo'yicha $\rho \in [0, r]$ oraliqda integrallasak, quyidagi formula hosil bo'ladi:

$$u(x_0) = \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{|x-x_0| \leq r} u(x) dx. \quad (4)$$

bu yerda $\frac{\omega_n r^n}{n} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} r^n - \mathbb{R}^n$ dagi r radiusli shar ($|x| \leq r$) hajmi. (4)

formula garmonik funksiya uchun shar bo'yicha o'rtacha (arifmetik) qiymat formulasi deyiladi.



Lebeg misoli

Laplas tenglamasi uchun Dirixle masalasi ba'zi “sodda” sohalarda (chegara Lyapunov sirtidan iborat bo`lmaganda) yechimga ega bo`lmasligi mumkin. Bu tasdiqni isbotlovchi Lebeg misolini keltiramiz. $\square^3 = \{(x, y, z)\}$ fazoda $0 \leq x \leq 1, y=0, z=0$ kesmada (uni S bilan belgilaymiz) $\mu(x)=x$ zichlik bilan taqsimlangan massa potensialini qaraylik:

$$u(x, y, z) = \int_0^1 \frac{\xi d\xi}{\sqrt{(\xi-x)^2 + y^2 + z^2}}. \quad (12)$$

Bu potensial S kesmadan tashqarida aniqlangan. Integralni hisoblab, bu potensialni $\rho = \sqrt{y^2 + z^2} \neq 0$ bo`lganda quyidagicha ifodalash mumkin:

$$u(x, y, z) = \varphi(x, \rho) - 2x \ln \rho, \\ \varphi(x, \rho) = \sqrt{(1-x)^2 + \rho^2} - \sqrt{x^2 + \rho^2} + x \ln \left((1-x + \sqrt{(1-x)^2 + \rho^2})(x + \sqrt{x^2 + \rho^2}) \right). \quad (13)$$

(12) dan quyidagi asimptotik tenglik ham kelib chiqadi:

$$u(x, y, z) = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \equiv \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty. \quad (14)$$

$u(x, y, z)$ funksiyaning sath sirtlari

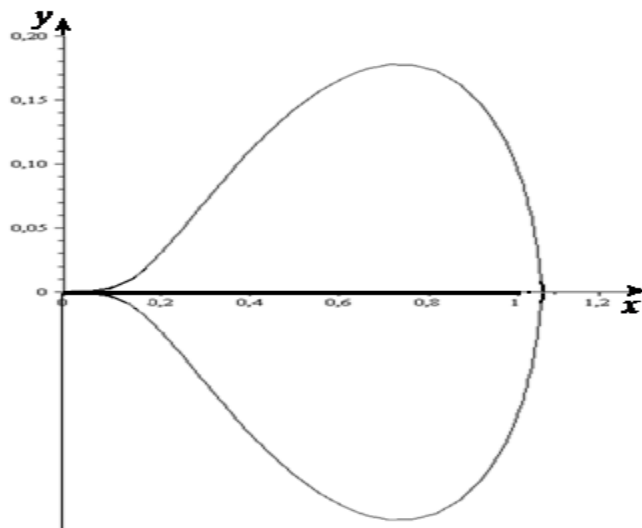
$$\varphi(x, \rho) - 2x \ln \rho = c \quad (c = \text{const})$$

tenglama bilan beriladi. Ular aylanma sirt bo`ladi (aylanish o`qi - x o`qi).  $c > 1$  bo`lganda bu sirt $x \geq 0$ yarimfazoda joylashgan, chunki $x < 0$ bo`lganda (12) ga ko`ra

$$0 < u(x, y, z) \leq u(x, 0, 0) = 1 + x \ln \left(1 - \frac{1}{x} \right) < 1.$$

Sath sirtlari $c > 1$ bo`lganda “uchli nok sirtiga” o`xshaydi; ular koordinatalar boshigacha “yetib keladi”: $x \rightarrow 0$ da $\rho \rightarrow 0$ (1- rasm.). Bu sirtlarga $(0; 0; 0)$ nuqtani qo`shib qo`yamiz. Sirtlarning koordinatalar boshiga urinishi cheksiz tartibli bo`ladi.





1- rasm. $u(x, y, z) = 2$ sath sirtining $z = 0$ kesimi.

Biror $c > 1$ li sath sirti chegaralagan chegaralannagan G sohani qaraylik. G sohada ∂G da $u|_{\partial G} = \varphi(\xi) = c$ chegaraviy shartli (tashqi) Dirixle masalasini qo'yaylik. (12) formula bilan aniqlangan $u(x, y, z)$ funksiya G da garmonik, ∂G ning koordinatalar boshidan farqli nuqtalarida $u(x, y, z) = c$, lekin $(x, y, z) \rightarrow (0; 0; 0)$ da turli yo'llar bo'ylab turli $\alpha \in [1; c]$ limitlar hosil bo'ladi, ya'ni $u(x, y, z)$ funksiya $\bar{G}$ da uzluksiz emas. Isbot qilish mumkinki, agar qaralayotgan Dirixle masalasining cheksizlikda (14) shartni qanoatlantiruvchi yechimi mavjud bo'lsa, u albatta aytilgan $u(x, y, z)$ funksiya bilan ustma-ust tushadi. Bu yechimning $\bar{G}$ da uzluksiz bo'lishiga zid. Shunday qilib, qo'yilgan Dirixle masalasi yechimga ega emas.

Endi $R = 1/2$ radiusli $(1/2; 0; 0)$ markazli sferaga nisbatan Kelvin almashtirishini bajarsak, G soha chegaralangan $\mathcal{G}$ sohaga o'tadi va shu soha uchun hosil bo'luvchi mos Dirixle masalasi yechimga ega bo'lmaydi. $\mathcal{G}$ soha olmaga o'xshash bo'ladi, lekin uning chegarasi koordinatalar boshiga cheksiz tartibli urinadi (juda ham uchli "voronka" shardan chiqarib tashlangan).

Xulosa

Ushbu maqolada garmonik funksiyalar va ularning Laplas tenglamasi bilan bog'liq asosiy xossalari qisqacha o'rganildi. Kelvin almashtirishi, o'rtacha qiymat teoremasi hamda invariantlik xossalari tahlil qilindi. Shuningdek, Lebeg misoli orqali Dirixle masalasining ayrim sohalarda yechimga ega bo'lmashligi ko'rsatildi.

Olingan natijalar garmonik funksiyalar nazariyasining asosiy g'oyalarini tushunish va ularning amaliy-matematik ahamiyatini anglashga xizmat qiladi.

Adabiyotlar:

1. Тиман А.Ф., Трофимов В.Н. Введение в теорию гармонических функций. М.: Наука, 1968. -208 с.
2. Гилбарг Д., Трудингер М. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. – М.: Наука, 1989. – 464 с.
3. Курант Р., Гилберт Д. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. -831 с.
4. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения с частных производных. М.: Наука, 1976. -392 с.

