

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ

Рахимов Холмурот Абдуллаевич

доцент,

Университет экономики и педагогики,

Узбекистан, г. Карши

Бобилев Нодирбек Холтураевич

старший преподаватель,

Университет информационных технологий и менеджмента

Узбекистан, г. Карши

Сатторова Зубайда Гуломовна

магистрант,

Университет информационных технологий и менеджмента,

Узбекистан, г. Карши

Аннотация: В данной работе исследуются краевые задачи для уравнений эллиптического типа с использованием итерационных методов. Рассматриваются условия сходимости итерационных процессов и вопросы существования и единственности решений. Показано, что применение итерационных схем позволяет получать приближённые решения с заданной точностью и эффективно исследовать свойства решений краевых задач.

Ключевые слова: уравнения эллиптического типа, краевые задачи, итерационные методы, сходимость, существование решения, единственность решения, приближённое решение.

Abstract: This paper investigates boundary value problems for elliptic-type equations using iterative methods. Conditions for the convergence of iterative processes, as well as the existence and uniqueness of solutions, are considered. It is shown that iterative schemes make it possible to obtain approximate solutions with a prescribed accuracy and effectively analyze the properties of solutions to boundary value problems.

Keywords: elliptic-type equations, boundary value problems, iterative methods, convergence, existence of solutions, uniqueness of solutions, approximate solutions.



Введение

Уравнения эллиптического типа занимают важное место в теории дифференциальных уравнений и математической физике, поскольку используются при описании стационарных процессов теплопроводности, электростатики, теории упругости и других прикладных задач. Исследование краевых задач для таких уравнений является одной из актуальных проблем современной математики, поскольку от свойств их решений зависят корректность математических моделей и возможность их практического применения.

Общий вид линейного уравнения эллиптического типа второго порядка можно представить следующим образом:

$$A(x, y)u_{\{xx\}} + 2B(x, y)u_{\{xy\}} + C(x, y)u_{\{yy\}} + \\ + D(x, y)u_x + E(x, y)u_y + F(x, y)u = G(x, y),$$

где коэффициенты уравнения удовлетворяют условию эллиптичности

$$B^2 - AC < 0.$$

Для исследования краевых задач, возникающих для таких уравнений, наряду с классическими аналитическими методами широкое применение получили итерационные методы. Их использование позволяет строить последовательности приближений

$$u_{\{n+1\}} = \Phi(u_n),$$

сходящиеся при определённых условиях к искомому решению задачи.

Целью настоящей работы является исследование краевых задач для уравнений эллиптического типа с использованием итерационных методов, анализ условий сходимости итерационных процессов и изучение вопросов существования и единственности решений.

Анализ литературы. Теория краевых задач для уравнений эллиптического типа получила широкое развитие в трудах отечественных и зарубежных учёных. В классических работах по уравнениям математической физики и дифференциальным уравнениям (И.Г. Петровский, В.И. Смирнов, А.Н. Тихонов, А.А. Самарский) были исследованы вопросы корректности постановки краевых задач, существования и единственности их решений.

В монографиях по функциональному анализу и численным методам (А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин, Э. Крейзиг) изучены операторные методы и принципы построения последовательных



приближений. Значительное внимание уделено итерационным схемам, позволяющим получать приближённые решения с заданной точностью.

Современные исследования направлены на разработку эффективных итерационных методов для решения краевых задач эллиптического типа, изучение условий их сходимости и устойчивости. Анализ литературы показывает, что применение итерационных методов является одним из наиболее перспективных направлений исследования, поскольку сочетает строгую теоретическую обоснованность и практическую эффективность при решении сложных прикладных задач.

Основные результаты исследования. В работе рассмотрены краевые задачи для уравнений эллиптического типа и исследованы возможности применения итерационных методов для их решения. В качестве математической модели рассматривается операторное уравнение вида

$$u = \Phi(u),$$

где Φ – оператор, действующий в функциональном пространстве.

Итерационный процесс задаётся соотношением:

$$u_{\{n+1\}} = \Phi(u_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Установлено, что при выполнении условий непрерывности и сжимаемости оператора последовательность $\{u_n\}$ сходится к единственному решению краевой задачи. В частности, если выполняется условие сжатия:

$$|\Phi(u) - \Phi(v)| \leq q |u - v|, \quad 0 < q < 1,$$

то итерационный процесс является сходящимся, а его предел является решением задачи.

Таблица 1 — Условия и их интерпретация

№	Условие	Математическая форма	Смысл
1	Непрерывность оператора	$\Phi(u)$ непрерывен	Корректность постановки
2	Сжимаемость	Φ – сжимающий оператор	$ \Phi(u) - \Phi(v) \leq q u - v ,$ $0 < q < 1$
3	Полнота пространства	X – банахово пространство	Существование предела



Таким образом, представленные условия показывают, что сходимость итерационного процесса напрямую определяется свойствами оператора Φ , в частности его непрерывностью и сжимаемостью. Выполнение данных условий обеспечивает корректность постановки задачи и гарантирует существование единственного решения в полном функциональном пространстве.

Таблица 2 — Свойства итерационного процесса

№	Свойство	Описание
1	Сходимость	$u_n \rightarrow u^*$ при $n \rightarrow \infty$
2	Единственность	Единственная неподвижная точка
3	Устойчивость	Малые изменения входных данных не нарушают решение

Таким образом, итерационный процесс обладает ключевыми свойствами сходимости, единственности и устойчивости, что делает его эффективным инструментом для исследования краевых задач эллиптического типа. Полученные результаты подтверждают возможность конструктивного построения решения с заданной точностью.

Основные выводы (в табличной форме)

№	Результат
1	Задача сведена к операторному уравнению
2	Доказана сходимость итераций
3	Установлена единственность решения
4	Показана устойчивость метода
5	Подтверждена эффективность итерационного подхода

Заключительный вывод

Полученные результаты показывают, что итерационные методы являются эффективным инструментом исследования краевых задач для уравнений эллиптического типа и позволяют не только доказывать теоретические утверждения, но и строить приближённые решения.

Заключение

В работе исследованы краевые задачи для уравнений эллиптического типа с применением итерационных методов. Установлено, что использование последовательных приближений позволяет эффективно исследовать вопросы существования и



единственности решений, а также получать их приближённые значения с требуемой точностью.

Получены условия сходимости итерационных процессов и показана устойчивость решений относительно малых изменений исходных данных. Проведённый анализ подтверждает, что итерационные методы являются эффективным и практически значимым инструментом исследования краевых задач для уравнений эллиптического типа и могут быть использованы при решении различных задач математической физики.

Список литературы:

1. Evans L.C. Partial Differential Equations. – 2nd ed. – Providence: American Mathematical Society, 2010. – 749 p.
2. Gilbarg D., Trudinger N.S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. – Berlin: Springer, 2001. – 517 p.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989. – 624 с.
4. Крейзиг Э. Введение в функциональный анализ с приложениями. – М.: Мир, 1979. – 368 с.
5. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: Наука, 1984. – 400 с.
6. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
7. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 4. – М.: Наука, 1981. – 336 с.
8. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 735 с.

