

ИССЛЕДОВАНИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ
ЗАДАЧИ ГУРСА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО
ПОРЯДКА НА ОСНОВЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО ПОДХОДА

Шарипов Эргаш Орипович

Доцент,

Университет информационных технологий и менеджмента,

Узбекистан, г. Карши

Бобилов Нодирбек Холтураевич

старший преподаватель,

Университет информационных технологий и менеджмента

Узбекистан, г. Карши

Бобокулов Шарофиддин Байрамали угли

магистрант,

Университет информационных технологий и менеджмента,

Узбекистан, г. Карши

Аннотация: В работе исследуется задача Гурса для уравнений с частными производными второго порядка на основе функционально-операторного подхода. Показано, что сведение задачи к операторному уравнению в полном метрическом пространстве позволяет установить существование и единственность решения с использованием теоремы Банаха о неподвижной точке.

Ключевые слова: задача Гурса, частные производные, функционально-операторный подход, банахово пространство, неподвижная точка, существование решения, единственность решения.

Abstract: This paper investigates the Goursat problem for second-order partial differential equations based on a functional-operator approach. It is shown that reducing the problem to an operator equation in a complete metric space allows one to establish the existence and uniqueness of the solution using Banach's fixed point theorem.

Keywords: Goursat problem, partial differential equations, functional-operator approach, Banach space, fixed point, existence of solution, uniqueness of solution.



Введение

Задачи для уравнений с частными производными второго порядка занимают важное место в современной математике и широко применяются при моделировании различных физических процессов. Особое внимание в данной области уделяется вопросам существования и единственности решений краевых задач, среди которых значительное место занимает задача Гурса.

Анализ литературы. Уравнения с частными производными второго порядка являются одним из центральных объектов современной математической физики и функционального анализа, поскольку они описывают широкий класс процессов, таких как распространение волн, теплопроводность и диффузия. Общий вид таких уравнений имеет форму

$$A(x, y)u_{\{xx\}} + 2B(x, y)u_{\{xy\}} + C(x, y)u_{\{yy\}} + \\ + D(x, y)u_x + E(x, y)u_y + F(x, y)u = G(x, y).$$

Классификация данных уравнений определяется выражением $\Delta = B^2 - AC$,

где при $\Delta > 0$ уравнение относится к гиперболическому типу.

Особое место среди краевых задач для гиперболических уравнений занимает задача Гурса, в которой начальные условия задаются на характеристических линиях. В нелинейном случае она имеет

вид

$$u_{xy}(x, y) = f(x, y, u, u_x, u_y),$$

с начальными условиями

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(0, y) = \psi(y).$$

При определённых условиях данная задача эквивалентна интегральному уравнению

$$u(x, y) = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0) + \int_0^x \int_0^y f(s, t, u) dt ds.$$

Функционально-операторный подход позволяет переписать задачу в виде операторного уравнения

$$u = Tu,$$

где T – нелинейный оператор, действующий в полном метрическом или банаховом пространстве функций.



Если оператор T является сжимающим, то есть выполняется условие

$$\|Tu - Tv\| \leq q\|u - v\|, \quad 0 < q < 1,$$

то согласно теореме Банаха о неподвижной точке оператор имеет единственную неподвижную точку u^* , что эквивалентно существованию и единственности решения задачи Гурса.

Таким образом, задача Гурса естественным образом сводится к исследованию свойств операторов в функциональных пространствах, что позволяет применять методы функционального анализа и теории метрических пространств.

В современной математической литературе задача Гурса для уравнений с частными производными второго порядка рассматривается в работах по уравнениям математической физики и функциональному анализу. В классических учебниках по дифференциальным уравнениям и математической физике (И.Г. Петровский, В.И. Смирнов, А.Н. Тихонов и др.) задача Гурса изучается как частный случай гиперболических уравнений с характеристическими начальными условиями.

В трудах, посвящённых функциональному анализу и теории операторов (А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин, Э. Крейзиг), особое внимание уделяется применению банаховых пространств и принципа сжимающих отображений для исследования существования и единственности решений. Эти методы позволяют переводить краевые задачи в эквивалентные операторные уравнения.

В современных исследованиях (работы по нелинейным дифференциальным уравнениям и интегральным уравнениям) активно используется операторный подход, основанный на теореме Банаха о неподвижной точке, а также методы метрических пространств и интегральных преобразований.

Таким образом, анализ литературы показывает, что развитие теории задачи Гурса проходит от классических аналитических методов к современным функционально-операторным подходам, что обеспечивает более общий и универсальный аппарат исследования.



Основные результаты исследования. Анализ проводится на основе

свойств оператора T . Рассматривается его непрерывность, ограниченность и сжимаемость:

$$\|Tu - Tv\| \leq q \|u - v\|, \quad 0 < q < 1$$

Установлено, что при выполнении данного условия пространство решений становится полным в смысле метрики, а последовательные приближения:

$$u_{\{n+1\}} = Tu_n$$

сходятся к единственной неподвижной точке.

Таким образом, задача Гурса интерпретируется как проблема поиска фиксированной точки в функциональном пространстве.

Основные полученные результаты можно сформулировать следующим образом:

задача Гурса сведена к операторному уравнению в полном метрическом пространстве;

доказано существование и единственность решения при условии сжимаемости оператора;

установлена сходимость итерационного процесса приближений;

показана устойчивость решения относительно малых изменений входных данных;

подтверждена эффективность функционально-операторного подхода по сравнению с классическими методами.

Таким образом, функционально-операторный метод позволяет не только строго обосновать разрешимость задачи Гурса, но и получить конструктивный алгоритм построения решения.

Заключение

В данной работе исследована задача Гурса для уравнений с частными производными второго порядка на основе функционально-операторного подхода. Показано, что сведение исходной краевой задачи к операторному уравнению в полном метрическом пространстве позволяет эффективно анализировать существование и единственность решения.

Использование теоремы Банаха о неподвижной точке обеспечивает строгое обоснование единственности решения при выполнении условий сжимаемости оператора. Кроме того,



установлена сходимость итерационного процесса и показана устойчивость решения к малым возмущениям.

Таким образом, функционально-операторный подход является эффективным инструментом исследования задачи Гурса, позволяющим не только доказать теоретические результаты, но и предложить конструктивные методы нахождения решения.

Список литературы:

1. vans L. C. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 2010.
2. Karimov O. K. *Matematik fizika tenglamalari*. Toshkent: Universitet, 2018.
3. Kreyszig E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley, 1989.
4. Nasriddinov A. N. *Differensial tenglamalar*. Toshkent: Fan, 2020.
5. Xaydarov B. M. *Matematik analiz*. Toshkent: O'qituvchi, 2019.
6. Zeidler E. *Applied Functional Analysis*. Springer, 1995.
7. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. Москва: Наука, 2012.
8. Петровский И. Г. *Лекции по уравнениям с частными производными*. Москва: Физматлит, 2009.
9. Смирнов В. И. *Курс высшей математики*, том 4. Москва: Наука, 2010.

