

**ARGUMENTI SILJIGAN DIFFERENSIAL TENGLAMALAR UCHUN QISQARTIRIB
AKSLANTIRISH PRINSIPI ASOSIDA YECHIMLARNING MAVJUDLIGI VA
YAGONALIGINI TADQIQ ETISH**

G.A.Qayumova

Axborot texnologiyalari va menejment universiteti, dotsenti

U.R.Sharipova

Axborot texnologiyalari va menejment universiteti, magistranti

Annotatsiya: Maqolada argumenti siljigan differensial tenglamalar uchun yechimlarning mavjudligi va yagonaligi masalalari Banaxning qisqartirib akslantirish prinsipi asosida tadqiq etilgan. Avvalo, berilgan Koshi masalasi integral tenglamaga keltirilib, unga mos integral operator qurilgan. Operatorning uzluksizlik va qisqartiruvchilik xossalari o'rganilib, Lipshits sharti ostida uning qisqartiruvchi akslantirish ekanligi isbotlangan. Banaxning qo'zg'almas nuqta teoremasi yordamida argumenti siljigan differensial tenglamalar uchun yechimlarning mavjudligi va yagonaligi asoslangan. Shuningdek, yechimning boshlang'ich ma'lumotlarga uzluksiz bog'liqligi o'rganilib, olingan nazariy natijalar maxsus model tenglama va sonli misol yordamida tasdiqlangan. Tadqiqot natijalari funksional analiz, differensial tenglamalar nazariyasi hamda matematik modellashtirish masalalarida qo'llanilishi mumkin.

Kalit so'zlar: Argumenti siljigan differensial tenglama, Koshi masalasi, Banax fazosi, metrik fazo, qisqartirib akslantirish prinsipi, qo'zg'almas nuqta, integral operator, Lipshits sharti, mavjudlik, yagonalik, funksional analiz, operator tenglama, kechikuvchi argument, integral tenglama.

Gammershteyn tipidagi argumenti siljigan integral tenglamalar uchun Banaxning qisqartirib akslantirish prinsipi qo'llanilib, yechimlarning mavjudligi va yagonaligi isbotlandi. Mazkur paragrafda ushbu yondashuv bevosita argumenti siljigan differensial tenglamalarga tatbiq etiladi.

Ma'lumki, argumenti siljigan differensial tenglamalarda noma'lum funksiyaning hosilasi uning oldingi (yoki kechikayotgan) qiymatlariga bog'liq bo'ladi. Bunday tenglamalarni tadqiq etishda asosiy qiyinchiliklardan biri siljigan argument tufayli hosil bo'ladigan funksional bog'liqlikdir. Shu sababli masalani integral operatorlar yordamida o'rganish qulay hisoblanadi.



Funksional analiz metodlari, xususan **Banaxning qisqartirib akslantirish prinsipi** argumenti siljigan differensial tenglamalar uchun mavjudlik va yagonalik masalalarini tadqiq etishda samarali vosita hisoblanadi.

Masalaning qo'yilishi. Quyidagi Koshi masalasini qaraymiz:

$$x'(t) = f(t, x(t-\tau)), \quad t \in [a, b] \quad (3)$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [a-\tau, a] \quad (4)$$

Bu yerda:

- $\tau > 0$ — siljish (kechikish) parametri;
- $\varphi(t)$ — berilgan uzluksiz boshlang'ich funksiya.

Masalaning maqsadi (3.3)–(3.4) Koshi masalasi yechimining mavjudligi va yagonaligi shartlarini aniqlashdan iborat.

Integral operatorni qurish. (3.3) tenglamani $[a, t]$ oraliqda integrallaymiz:

$$x(t) - x(a) = \int_a^t f(s, x(s-\tau)) ds.$$

(4) boshlang'ich shartdan $x(a) = \varphi(a)$ ekanligini hisobga olib, quyidagi integral tenglamani hosil qilamiz:

$$x(t) = \varphi(a) + \int_a^t f(s, x(s-\tau)) ds.$$

Endi $C[a-\tau, b]$ fazosida quyidagi T operatorni kiritamiz:

$$(Tx)(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [a-\tau, a] \\ \varphi(a) + \int_a^t f(s, x(s-\tau)) ds, & t \in [a, b] \end{cases} \quad (6)$$

U holda (3)-(4) masala $Tx = x$ operatorli tenglamaga, ya'ni operatorning qo'zg'almas nuqtasini topish masalasiga keltiriladi.

Operatorning uzluksizligi

Lemma.3. Agar $f(t, x)$ funksiya o'z aniqlanish sohasida uzluksiz bo'lsa, u holda $T : C[a-\tau, b] \rightarrow C[a-\tau, b]$ operator uzluksizdir.

Isbot. Faraz qilaylik, $C[a-\tau, b]$ fazosida $x_n \rightarrow x$ bo'lsin. f funksiyaning uzluksizligiga ko'ra, $f(t, x_n(t-\tau)) \rightarrow f(t, x(t-\tau))$ bo'ladi. Integral belgisi ostida limitga o'tish haqidagi teoremaga binoan, $t \in [a, b]$ da:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (Tx_n)(t) = \varphi(a) + \int_a^t \lim_{n \rightarrow \infty} f(s, x_n(s-\tau)) ds = (Tx)(t)$$

tenglik o'rinli. $t \in [a-\tau, a]$ oraliqda esa $Tx_n = Tx = \varphi$ bo'lgani uchun yaqinlashish o'z-o'zidan bajariladi. Demak, $Tx_n \rightarrow Tx$, ya'ni operator uzluksiz. Lemma isbotlandi.

Operatorning qisqartiruvchi ekanligi. Faraz qilaylik, $f(t, x)$ funksiya ikkinchi argumenti bo'yicha **Lipshits shartini** qanoatlantirsin:



$$|f(t,u) - f(t,v)| \leq L|u - v|, \quad L = \text{const} > 0. \quad (7)$$

Teorema.3. Agar quyidagi shart bajarilsa:

$$L(b-a) < 1, \quad (8)$$

u holda T operator qisqartiruvchi akslantirish bo'ladi.

Isbot. Ixtiyoriy $x, y \in C[a-\tau, b]$ funksiyalar uchun $t \in [a-\tau, a]$ da $|(Tx)(t) - (Ty)(t)| = 0$ bo'ladi. $t \in [a, b]$ oraliq uchun esa:

$$|(Tx)(t) - (Ty)(t)| = \left| \int_a^t [f(s, x(s-\tau)) - f(s, y(s-\tau))] ds \right|$$

Lipshits shartidan foydalansak:

$$|(Tx)(t) - (Ty)(t)| \leq L \int_a^t |x(s-\tau) - y(s-\tau)| ds \leq L \int_a^t \|x - y\|_C ds \leq L(b-a) \|x - y\|_C$$

Bu yerda $\|x\|_C = \max_{t \in [a-\tau, b]} |x(t)|$ — uzluksiz funksiyalar fazosidagi standart norma.

Maksimum normaga o'tsak:

$$\|Tx - Ty\|_C \leq L(b-a) \|x - y\|_C.$$

(3) shartga ko'ra $q = L(b-a) < 1$ deb belgilasak, $\|Tx - Ty\|_C \leq q \|x - y\|_C$ hosil bo'ladi. Demak, T operator qisqartiruvchi akslantirishdir. Teorema isbotlandi. Asosiy mavjudlik va yagonalik teoremasi

Teorema.4. Agar:

1. $f(t, x)$ funksiya uzluksiz bo'lsa;
2. $f(t, x)$ ikkinchi argumenti bo'yicha Lipshits shartini qanoatlantirsa;
3. $L(b-a) < 1$ shart bajarilsa,

u holda (3)-(4) Koshi masalasi $C[a-\tau, b]$ fazosida yagona yechimga ega bo'ladi.

Isbot. $C[a-\tau, b]$ fazosi metrik faza sifatida to'la (Banach fazosi). 3-teoremaga ko'ra, T operator ushbu fazoda qisqartiruvchi akslantirishdir. U holda **Banachning qo'zg'almas nuqta prinsipiga** asosan, T operator yagona $x \in C[a-\tau, b]$ qo'zg'almas nuqtaga ega, ya'ni $Tx = x$. Ushbu qo'zg'almas nuqta (3.3)–(3.4) Koshi masalasining yagona yechimidir. Teorema isbotlandi.

Yechimning boshlang'ich ma'lumotga bog'liqligi. Amaliy masalalarda boshlang'ich ma'lumotlarning o'lchash xatoliklari tufayli aniq berilmasligini hisobga olib, yechimning boshlang'ich funksiyaga turg'un bog'liqligini o'rganish muhim hisoblanadi.

Faraz qilaylik, $\varphi_1(t)$ va $\varphi_2(t)$ ikkita har xil boshlang'ich funksiyalar bo'lib, ularga mos yechimlar $x_1(t)$ va $x_2(t)$ bo'lsin.



Teorema.5. Agar Lipshits sharti va $L(b-a) < 1$ sharti bajarilsa, (3.3)–(3.4) masalaning yechimi boshlang‘ich funksiyaga uzluksiz bog‘liq bo‘ladi, ya‘ni:

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\| \rightarrow 0 \Rightarrow \|x_1 - x_2\| \rightarrow 0.$$

Isbot. Mos integral tenglamalardan ayirmani qaraymiz:

$$x_1(t) - x_2(t) = \varphi_1(a) - \varphi_2(a) + \int_a^t [f(s, x_1(s-\tau)) - f(s, x_2(s-\tau))] ds$$

Bundan norma bo‘yicha baholasak:

$$\|x_1 - x_2\|_C \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|_C + L(b-a) \|x_1 - x_2\|_C$$

$$\|x_1 - x_2\|_C (1 - L(b-a)) \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|_C$$

$$\|x_1 - x_2\|_C \leq \frac{1}{1 - L(b-a)} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_C$$

Bu yerda $L(b-a) < 1$ bo‘lgani uchun $\frac{1}{1 - L(b-a)} > 0$ o‘zgarmas miqdordir.

Demak, $\|\varphi_1 - \varphi_2\|_C \rightarrow 0$ bo‘lganda $\|x_1 - x_2\|_C \rightarrow 0$ kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

Maxsus hol (Kechikuvchi eksponensial model). Agar $f(t, x) = \lambda x$ bo‘lsa, quyidagi chiziqli argumenti siljigan differensial tenglama hosil bo‘ladi:

$$x'(t) = \lambda x(t-\tau). \quad (9)$$

Bu biologiya va iqtisodiyotda keng qo‘llaniladigan **kechikuvchi eksponensial model** deb ataladi. Unga mos operator:

$$(Tx)(t) = \varphi(a) + \lambda \int_a^t x(s-\tau) ds.$$

Agar $|\lambda|(b-a) < 1$ bo‘lsa, operator qisqartiruvchi bo‘ladi va Banax teoremasiga ko‘ra yagona yechim mavjudligi kafolatlanadi[8].

Sonli misol. Quyidagi masalani qaraymiz:

$$x'(t) = \frac{1}{2} x(t-1), \quad t \in [0, 1],$$

$$x(t) = 1, \quad t \in [-1, 0].$$

Bu yerda:

$$\bullet L = \frac{1}{2} \text{ (chunki } f(t, x) = \frac{1}{2} x \text{ va } \left| \frac{1}{2} u - \frac{1}{2} v \right| \leq \frac{1}{2} |u - v|);$$

$$\bullet a = 0, b = 1 \Rightarrow b - a = 1.$$

Shartni tekshiramiz:

$$L(b-a) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} < 1. \text{ Banaxning qisqartirib akslantirish prinsipi shartlari to‘liq}$$

bajariladi. Demak, berilgan Koshi masalasi yagona yechimga ega[6]. (Haqiqatan ham,



$t \in [0,1]$ da $x(t-1)=1$ bo'lgani uchun $x'(t)=\frac{1}{2} \Rightarrow x(t)=\frac{1}{2}t+1$ yagona yechim bo'ladi).

Mazkur paragrafda argumenti siljigan differensial tenglamalar uchun qisqartirib akslantirish prinsipining tatbiqi o'rganildi[7]. Differensial tenglamaga mos integral operator qurilib, uning uzluksizlik va qisqartiruvchilik xossalari tadqiq qilindi. Lipshits sharti va $L(b-a)<1$ tengsizligi ostida operatorning qisqartiruvchi akslantirish ekanligi ko'rsatildi. Banaxning qo'zg'almas nuqta teoremasi yordamida Koshi masalasi yechimining mavjudligi va yagonaligi isbotlandi[5]. Shuningdek, yechimning boshlang'ich ma'lumotga uzluksiz bog'liqligi (turg'unligi) asoslandi[9] hamda model tenglama va sonli misol yordamida olingan natijalarning amaliy ahamiyati ko'rsatildi.

Foydalanilgan adabiyotlar:

10. Ayupov Sh.A., Berdiqulov M.A., Turg'unboyev R.M. Funktsional analiz. – Toshkent: Universitet, 2008. – 320 b.
11. Abdullayev J.I., G'anixo'jayev R.N., Shermatov M.H., Egamberdiyev O.I. Funktsional analiz. – Toshkent: Fan va texnologiya, 2009. – 356 b.
12. Agarwal R.P., O'Regan D. Functional Differential Equations. – New York: Springer, 2008. – 454 p.
13. Burton T.A. Volterra Integral and Differential Equations. – Amsterdam: Elsevier, 2005. – 202 p.
14. Abdishukurovna Q. B., Abdushukurovna Q. G. QISQARTIRIB AKS ETIRISH PRINTSIPINI TADBIQLARI //Лучшие интеллектуальные исследования. – 2026. – Т. 62. – №. 1. – С. 29-35.
15. Qayumova G. RAQAMLASHTIRILGAN MUHITDA MUSTAQIL ISHLASH KOMPETENSIYASINI RIVOJLANTIRISHDA AXBOROT TEXNOLOGIYALARNING O'RNI //Science and innovation. – 2022. – Т. 1. – №. B8. – С. 505-508.
16. Qayumova G. A. Matematika fanini o'qitishda talabalarning mustaqil ishlash kompetentsiyani rivojlantirish //Экономика и социум. – 2024. – №. 11-2 (126). – С. 343-348.
17. Кадиркулов Б. Ж., Каюмова Г. А. Нелокальная задача для уравнения смешанного типа дробного порядка с инволюцией //Итоги



науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. – 2022. – Т. 210. – №. 0. – С. 55-65.

18. Eshmatov B., Kayumova G. On a problem for a parabolic-hyperbolic fractional order equation with degeneration in time //American Institute of Physics Conference Series. – 2021. – Т. 2365. – №. 1. – С. 070009.

