

GEOMETRIYA KURSIDA KOPYOQLARNING HAJMINI O'RGANISH METODIKASI

Egamberdiyeva Farangis Oymurod qizi

KIRISH

Prizmalar va parallelepipedlar hajmini o'qitish metodikasi

To'g'ri burchakli parallelepiped hajm va birlik kub tushunchasi. O'quvchilarga jismning ko'p birlik kub sig'ishini ko'rsatish orqali

$$V = a \cdot b \cdot c$$

formulasi tushuntiriladi.

To'g'ri burchakli parallelepiped hajmi va birlik kub tushunchasi geometriya kursining eng fundamental mavzularidan biri bo'lib, bu tushuncha o'quvchilarda fazoviy tasavvurni shakllantirishning boshlang'ich nuqtasi hisoblanadi. Ushbu mavzu orqali o'quvchilar nafaqat matematik formulani o'zlashtiradilar, balki atrof-muhitdagi uch o'lchamli jismlarning sig'imi, ularni o'lchash usullari va real hayotdagi tatbiqlari haqida ham tasavvurga ega bo'ladilar. Birlik kub tushunchasi esa hajm o'lchovining asosiy mezoni sifatida butun bilimlar uchun poydevor vazifasini o'taydi.

To'g'ri burchakli parallelepiped deb barcha yoqlari to'g'ri to'rtburchaklardan iborat bo'lgan jismga aytiladi. Bu jismning har bir burchagi 90 gradusga teng bo'lib, qarama-qarshi yoqlari o'zaro parallel va tengdir. Kundalik hayotda gugurt qutisi, kitob, xona, akvarium, yuk mashinasining furgoni, g'isht va muzlatkich kabilar to'g'ri burchakli parallelepipedga eng oddiy misollardir. O'quvchilar ushbu jismlarni ko'z oldiga keltirgan holda, ularning shakli va o'lchamlari haqida dastlabki tasavvurga ega bo'ladilar. Mavzuni o'qitishni aynan shunday real ob'ektlarni namoyish qilishdan boshlash eng to'g'ri yondashuvdir, chunki o'quvchi mavhum tushunchaga o'tishdan avval konkret narsalar bilan ishlash orqali fikrlash qobiliyatini rivojlantiradi.

Birlik kub deganda har bir qirrasining uzunligi bir birlikka, masalan bir santimetr, bir detsimetr yoki bir metr ga teng bo'lgan kub tushuniladi. Bu kubning hajmi bir kub birlikka teng bo'ladi, ya'ni 1 sm^3 , 1 dm^3 yoki 1 m^3 deb ataladi. Birlik kub hajm o'lchovining etaloni hisoblanadi. Xuddi uzunlikni santimetr, detsimetr, metr kabi birliklar bilan o'lchaganimizdek, hajmni ham birlik kublar orqali o'lchaymiz. O'quvchilarga bu tushunchani singdirish uchun ularga bir santimetrlik kublarni qo'lda ushlab ko'rish imkonini berish, ularni sanash, ular bilan turli shakllar yasash imkoniyatini yaratish lozim. Birlik kublar yordamida o'quvchilar hajm deganda jism ichiga nechta shunday birlik kub sig'ishi

mumkinligini anglashlari kerak. Bu yerda muhim jihat shundan iboratki, o'quvchi hajmini formulani qo'llab hisoblashdan oldin, uni amaliy ravishda, ko'z bilan ko'rib, qo'l bilan ushlab, sanab chiqish orqali o'zlashtirishi zarur.

To'g'ri burchakli parallelepipedning hajmini tushuntirishda eng samarali usul bu uning ichiga birlik kublarni joylashtirishdir. Masalan, o'lchamlari 4 santimetr, 3 santimetr va 2 santimetr bo'lgan to'g'ri burchakli parallelepipedni olaylik. Ushbu jismning bo'yi 4 sm, eni 3 sm va balandligi 2 sm ga teng. Endi bu jismning ichini birlik kublar bilan to'ldirishni tasavvur qilaylik. Avvalo, jismning tagidagi to'g'ri to'rtburchak yuzasiga birlik kublarni joylashtiramiz. Bo'yi 4 sm bo'lgani uchun bir qatorga 4 ta kub joylashtirish mumkin. Eni 3 sm bo'lgani uchun esa bunday qatorlardan 3 tasini yonma-yon joylashtirish mumkin. Demak, bir qavatda jami

$$4 \cdot 3 = 12$$

ta birlik kub joylashadi. Endi jismning balandligi 2 sm ga teng, ya'ni biz bunday qavatlardan 2 tasini ustma-ust joylashtirishimiz mumkin. Shunday qilib, butun jism ichiga jami

$$12 \cdot 2 = 24$$

ta birlik kub sig'adi. Demak, bu to'g'ri burchakli parallelepipedning hajmi 24 kub santimetrga teng. Aynan shu yerda o'quvchi

$$V = a \cdot b \cdot c$$

formulasining mohiyatini anglaydi: uzunlik, kenglik va balandlikning ko'paytmasi jism ichiga sig'adigan birlik kublarning umumiy soniga teng ekan. Bu yerda a, b va c bir xil o'lchov birligida ifodalangan bo'lishi shart, aks holda natija noto'g'ri chiqadi.

O'quvchilarda bu tushunchani mustahkamlash uchun turli xil o'lchamdagi to'g'ri burchakli parallelepipedlar bilan ishlash mashqlarini bajarish lozim. Masalan, o'lchamlari 5 sm, 4 sm va 3 sm bo'lgan jismning hajmini topishda o'quvchi avval tagdagi to'g'ri to'rtburchak yuzasiga

$$5 \cdot 4 = 20$$

ta birlik kub joylashishini, keyin esa balandlik 3 sm bo'lgani uchun 3 qavat bo'lishini va jami

$$20 \cdot 3 = 60$$

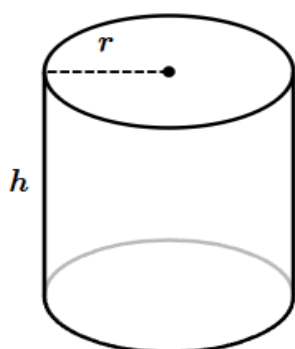
ta kub sig'ishini hisoblab topadi. Shu tariqa u

$$V = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \text{ sm}^3$$

degan xulosaga keladi. Bu jarayonda o'quvchi passiv tinglovchi emas, balki faol ishtirokchiga aylanadi, u o'zi kashf etgan bilimni uzoq muddat xotirasida saqlab qoladi. Shuningdek, o'quvchilarga o'lchamlari butun sonlardan iborat bo'lmagan jismlar, masalan 4,5 sm, 2,5 sm va 3 sm kabi o'lchamlar berilganda, ular birlik kublarni butunlay joylay olmasligini tushunadilar va bu kasr sonlar bilan ishlashga

o'tish zaruratini keltirib chiqaradi. Bu esa matematik tafakkurning 126isual bosqichiga o'tish imkonini beradi.

Slinr hajmi



$$V = \pi r^2 h$$

1.2. Ixtiyoriy prizma hajmi formulasini ishlab chiqarish.

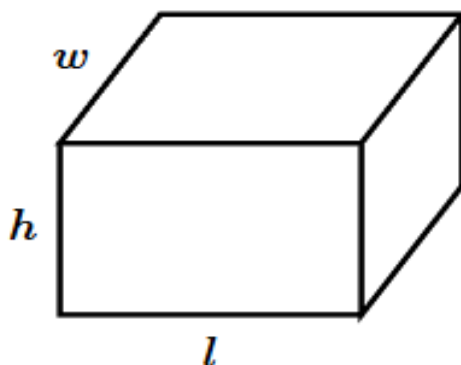
$$V = S_{asos} \cdot H$$

formulasini turli asosli (uchburchakli, ko'pburchakli) prizmalar uchun umumlashtirish metodikasi.

Ixtiyoriy prizma hajmi formulasini ishlab chiqarish geometriya kursidagi eng muhim umumlashtirish bosqichlaridan biridir. Bu bosqichda o'quvchilar to'g'ri burchakli parallelepiped hajmidan boshlab, to'g'ri prizma, so'ngra og'ma prizma va nihoyat ixtiyoriy shakldagi asosga ega bo'lgan prizmalar hajmi formulasiga qadar bo'lgan mantiqiy zanjirni mustaqil ravishda quradilar.

$$V = S_{asos} \cdot H$$

formulasi oddiy va ixcham ko'rinishiga qaramay, uning zamirida chuqur mantiq va matematik umumlashtirish yotadi. Bu formulani o'quvchilarga tayyor holda berish emas, balki ular bilan birgalikda kashf etish, turli xususiy hollardan umumiy xulosaga olib kelish metodikasi tafakkurni shakllantirishning eng samarali yo'lidir.



Ixtiyoriy prizma hajmi formulasini ishlab chiqarish jarayoni to'g'ri burchakli parallelepipeddan boshlanishi shart. O'quvchilar oldingi darslarda to'g'ri burchakli

parallelepiped hajmi uning uch o'lchamining ko'paytmasiga teng ekanligini birlik kublar yordamida mustaqil kashf etgan bo'ladilar. Endi o'qituvchi oldiga quyidagi savolni qo'yadi: to'g'ri burchakli parallelepipedni prizmaning xususiy holi sifatida qarash mumkinmi? Agar asos qilib to'g'ri to'rtburchakni olsak va uni balandlik bo'ylab ko'chirsak, to'g'ri burchakli parallelepiped hosil bo'ladi. Uning hajmi

$$V = a \cdot b \cdot c$$

edi. Bu yerda $a \cdot b$ asos yuziga, c esa balandlikka teng. Demak,

$$V = S_{asos} \cdot H.$$

Bu juda muhim bosqichdir: o'quvchi to'g'ri burchakli parallelepiped formulasini endi prizmaning umumiy formulasi sifatida qayta talqin qilishni o'rganadi. Bu kognitiv rezonans hosil qiladi va o'quvchida matematik tushunchalarning o'zaro bog'liqligi haqida tasavvur shakllanadi.

Keyingi bosqichda to'g'ri burchakli parallelepipeddan to'g'ri prizma o'tiladi. To'g'ri prizma deb yon qirralari asosga perpendikulyar bo'lgan prizma aytiladi. Uning asosi ixtiyoriy ko'pburchak bo'lishi mumkin: uchburchak, to'rtburchak, beshburchak va hokazo. O'qituvchi o'quvchilarga GeoGebra dasturida uchburchakli to'g'ri prizma modelini namoyish qiladi. Bu prizmaning asosidagi uchburchak yuzini S , balandligini H deb belgilaymiz. Endi savol tug'iladi: bu prizmaning hajmini qanday hisoblash mumkin? O'quvchilar bu yerda ko'pincha qiyinchilikka duch keladilar, chunki to'g'ri to'rtburchakli asosdan farqli ravishda uchburchak asosga birlik kublarni joylashtirish oson emas. Bu muammoni hal qilishning eng samarali usuli – prizmani qismlarga ajratish metodidir. Har qanday ko'pburchakni, jumladan uchburchakni ham, to'g'ri to'rtburchaklarga ajratish mumkin. Uchburchakni balandligi bo'ylab o'tkazilgan kesma yordamida ikkita to'g'ri burchakli uchburchakka ajratamiz. Har bir to'g'ri burchakli uchburchakni esa o'ziga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchakning yarmi sifatida qarash mumkin. Shu tariqa, uchburchakli prizmani ikkita to'g'ri burchakli parallelepiped yarmiga ajratish orqali uning hajmini mumkin. Ammo bu usul ancha murakkab va har xil uchburchaklar uchun har xil bo'ladi.

Shu nuqtada o'qituvchi yana bir muhim metodik yondashuvni qo'llaydi: prizmani to'g'ri burchakli parallelepipedgacha to'ldirish usuli. Masalan, asosi to'g'ri burchakli uchburchak bo'lgan prizmani olaylik. Agar biz shunday ikkinchi prizmani olib, ularni gipotenuzalari bo'ylab birlashtirsak, asosi to'g'ri to'rtburchak bo'lgan prizma hosil bo'ladi. Bu yangi prizmaning hajmi

$$V = S_{tortburchak} \cdot H = (a \cdot b) \cdot H$$

ga teng. Asl uchburchakli prizma esa bu to'g'ri burchakli parallelepipedning yarmiga teng, chunki ikkita teng uchburchakli prizma birlashib to'g'ri burchakli parallelepipedni hosil qiladi. Demak, uchburchakli prizmaning hajmi

$$V = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot a \cdot b \cdot H = \left(a \cdot b \frac{1}{2}\right) \cdot H = S_{uchburchak} \cdot H$$

ga teng. Bu yerda

$$S_{uchburchak} = a \cdot b \frac{1}{2}$$

Shu tariqa, o'quvchi to'g'ri burchakli uchburchak asosli prizma uchun

$$V = S_{asos} \cdot H$$

formulasi o'rinli ekanligiga ishonch hosil qiladi. Endi bu natijani ixtiyoriy uchburchakka umumlashtirish qoladi. Ixtiyoriy uchburchakni balandliklari yordamida bir nechta to'g'ri burchakli uchburchaklarga ajratish mumkin. Har bir to'g'ri burchakli uchburchak asosli prizmaning hajmi uning asos yuzi va balandligi ko'paytmasiga teng. Bu prizmalarni qo'shish orqali butun uchburchakli prizmaning hajmi uning asos yuzi va balandligi ko'paytmasiga teng bo'ladi. Bu yerda yig'indi integraliga o'xshash mantiq ishlaydi, ammo o'quvchilar buni arifmetik amallar orqali tushunadilar.

Uchburchakli prizmadan so'ng to'rtburchakli prizмага o'tiladi. To'rtburchakli prizmaning asosi to'rtburchak, trapetsiya yoki ixtiyoriy to'rtburchak bo'lishi mumkin. To'g'ri to'rtburchak asosli prizma hajmi

$$V = S \cdot H$$

ekanligi bizga to'g'ri burchakli parallelepipeddan ma'lum. Parallelogramm asosli prizmani qaraylik. Parallelogrammni bir diagonaldan kesib, ikkita teng uchburchakka ajratish mumkin. Har bir uchburchak asosli prizmaning hajmi

$$S_{uchburchak} \cdot H$$

ga teng. Ikkala prizmaning yig'indisi esa

$$(S_{uchburchak} + S_{uchburchak}) \cdot H = S_{parallelogram} \cdot H$$

ga teng. Demak, asosli prizmaning hajmi ham

$$V = S_{asos} \cdot H.$$

Trapetsiya asosli prizma uchun esa trapetsiyani to'g'ri to'rtburchak va uchburchaklarga ajratish yoki ikkita teng trapetsiyadan to'g'ri to'rtburchak hosil qilish usuli qo'llaniladi.

$$V = S_{asos} \cdot H.$$

Shu tariqa, har qanday to'rtburchak asosli prizma uchun formula o'rinli ekanligi isbotlanadi.

Endi navbat beshburchakli, oltiburchakli va umuman ixtiyoriy n-burchakli prizmalarga keladi. Bu yerda metodik jihatdan eng samarali yondashuv bu ko'pburchakni uchburchaklarga triangulyatsiya qilish usulidir. Har qanday ko'pburchakni uning bir uchidan chiquvchi diagonallar yordamida $(n - 2)$ ta uchburchakka ajratish mumkin. Masalan, beshburchakni 3 ta, oltiburchakni 4 ta uchburchakka ajratish mumkin. Endi shu ko'pburchak asos bo'lgan prizmani

tasavvur qilaylik. Bu prizmani asosdagi uchburchaklarga mos keladigan (n-2) ta uchburchakli prizmalarga ajratish mumkin. Buning uchun prizmaning yon qirralari bo'ylab asosdagi diagonallarga mos tekisliklar o'tkaziladi. Har bir hosil bo'lgan uchburchakli prizmaning balandligi asl prizmaning balandligiga teng, asos yuzi esa mos uchburchakning yuziga teng. Uchburchakli prizmalarning hajmi

$$V_i = S_i \cdot H.$$

Barcha prizmalarning hajmlarini qo'shsak,

$$V = (S_1 + S_2 + \dots + S_{(n-1)}) \cdot H = S_{asos} \cdot H$$

hosil bo'ladi. Bu juda muhim umumlashtirishdir: o'quvchi bu yerda nafaqat prizma hajmi formulasini, balki matematik induksiya va dekompozitsiya usullarining go'zalligini ham anglaydi. U endi har qandari to'g'ri prizmaning hajmi, asosi qanday murakkab ko'pburchak bo'lishidan qat'iy nazar, doimo asos yuzi bilan balandlikning ko'paytmasiga teng ekanligini biladi.

To'g'ri prizmalardan so'ng og'ma prizmalarga o'tish navbatdagi muhim bosqichdir. Bu bosqichda o'qituvchi Kavalieri prinsipiga murojaat qiladi. Bir xil asos yuzi va bir xil perpendikulyar balandlikka ega bo'lgan to'g'ri prizma va og'ma prizmani olaylik. Ularni asos tekisligiga parallel bo'lgan tekisliklar bilan kesamiz. To'g'ri prizmaning kesim yuzi uning asos yuziga teng bo'ladi. Og'ma prizmaning kesim yuzi ham xuddi shu balandlikda asos yuziga teng bo'ladi, chunki og'ish faqat gorizontal siljishni keltirib chiqaradi, shakl va yuzani o'zgartirmaydi. Kavalieri prinsipiga ko'ra, har qanday sathda kesim yuzalari teng bo'lgan ikki jismning hajmi tengdir. Demak, og'ma prizmaning hajmi ham

$$V = S_{asos} \cdot H$$

ga teng. Bu yerda H perpendikulyar balandlik, ya'ni asoslar orasidagi eng qisqa masofa, yon qirraning uzunligi emas. Bu tushuncha o'quvchilar tomonidan ko'pincha tushuniladi, shuning uchun o'qituvchi buni alohida ta'kidlashi va turli misollar orqali mustahkamlashi lozim. Masalan, yon qirrasi 10 sm, ammo asosga 60° burchak ostida og'gan prizmaning balandligi

$$10 \cdot \sin 60^\circ = 8,66 \text{ sm}$$

ga teng. Hajm esa

$$S \cdot 8,66$$

formula bilan hisoblanadi,

$$S \cdot 10$$

emas.

Xulosa

Ko'pyoqlar hajmini o'qitish metodikasi geometriya kursining eng muhim va murakkab bo'limlaridan biri bo'lib, u o'quvchilarning fazoviy tasavvurini, mantiqiy

tafakkurini va matematik kompetensiyalarini shakllantirishda hal qiluvchi rol o'ynaydi.

Metodik tizimning nazariy asosini Van Hiele tafakkur bosqichlari, Piagetning kognitiv rivojlanish nazariyasi va Vigotskiyning yaqin rivojlanish zonasi tashkil etadi. Ushbu nazariyalarga tayanib, ko'pyoqlar hajmini o'qitish vizualizatsiya bosqichidan boshlanib, tahlil, norasmiy deduksiya va nihoyat rasmiy deduksiya bosqichlariga qadar izchil rivojlanadi. Bunda konkret predmetlardan mavhum tushunchalarga, xususiyl hollardan umumiy formulalarga o'tish tamoyili asosiy metodik yo'nalish hisoblanadi.

To'g'ri burchakli parallelepiped hajmi va birlik kub tushunchasi butun mavzuning poydevoridir. Bu bosqichda o'quvchilar hajm deganda jism ichiga sig'adigan birlik kublar soni tushunilishini amaliy tajribalar orqali anglaydilar. Birlik kublar bilan ishlash, ularni sanash, turli o'lchamdagi jismlarga joylashtirish orqali

$$V = a \cdot b \cdot c$$

formulasi mantiqiy kashfiyot sifatida kelib chiqadi. Bu yondashuv o'quvchilarda hajm tushunchasining mohiyatini chuqur anglashga va formulani mexanik yodlashdan saqlanishga imkon beradi.

Foydalanilgan adabiyotlar:

- 1 Geometriya. 10–11-sinflar uchun darslik — stereometriya, ko'pyoqlar va ularning hajmlariga oid mavzular.
- 2 Algebra va Geometriya — fazoviy jismlar hajmlarini hisoblash usullari.
- 3 Elementar matematika kursi — prizma, piramida va boshqa ko'pyoqlarning hajmlari.
- 4 I. M. Gelfand va hammualliflarining geometriya bo'yicha asarlari.
- 5 Geometry — geometriyaning nazariy asoslari.
- 6 Stereometriya masalalari to'plami — hajmga oid amaliy masalalar va yechimlar.
- 7 [Ziyonet ta'lim portali](https://interonconf.org) — geometriya bo'yicha elektron resurslar va o'quv materiallari.